

Приложение к журналу

КВАНТ

№3/98

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

МАТЕМАТИКА 6 — 8

Составитель С.И.Токарев

Бюро



Квантум

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

МАТЕМАТИКА 6 — 8

Составитель С.И.Токарев



Москва 1998
Бюро «Квантум»

ББК 22.1
УДК 51 (076.1)

Приложение
к журналу «Квант»
№3/98

Под редакцией *А.П. Савина*

**К 32 «Квант» для младших школьников: Математика
6 — 8. / Составитель С.И. Токарев. — М.: Бюро Квантум,
1998. — 128 с. (Прил. к журналу «Квант» №3/98)
ISBN 5-85843-011-2**

В книге собраны задачи конкурса «Математика 6–8», приводимого журналом «Квант» с 1990 года, и ряд статей, адресованных школьникам 6–8 классов.

Для учащихся и преподавателей средних школ, лицеев и гимназий, для руководителей и участников математических кружков, а также для всех, кто интересуется математикой.

ISBN 5-85843-011-2

© Бюро Квантум
«Квант», 1998

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Задачи заочных конкурсов	5
Заключительные (очные) конкурсы	23
Заочный конкурс 1997/98 учебного года	46
Два письма Сереже. <i>А.Бендукидзе</i>	50
Тайны совершенных чисел и дружественных пар. <i>А.Варпаховский</i>	57
Наблюдения в математике. <i>Ф.Бартенев</i>	63
Метод перебора. <i>Ф.Бартенев, А.Савин</i>	66
Откуда пошли названия геометрических фигур? <i>Б.Розенфельд</i>	70
Треугольник Паскаля. <i>А.Бендукидзе</i>	72
Для чего нужны проценты? <i>А.Савин</i>	77
Правило «крайнего». <i>А.Розенталь</i>	80
По следам теоремы Пифагора. <i>Р.Рубинов</i>	87
Кое-что о выпуклости. <i>А.Савин</i>	92
Ответы и указания	96

ПРЕДИСЛОВИЕ

Конкурс по решению задач для младших школьников появился на страницах «Кванта» в 1990 году и сразу вызвал интерес читателей. Поначалу конкурс «Математика 6—8» был только заочным, позднее добавился очный заключительный тур, на который приглашаются победившие в конкурсе математические кружки. За время существования конкурса накопилась подборка интересных задач, некоторые из них довольно трудные и требуют немало изобретательности от решающего, однако для их решения, как правило, достаточно обладать математическим багажом шестиклассника.

В этой книжке собраны все задачи конкурса «Математика 6—8» вплоть до 1997/98 учебного года, снабженные ответами и указаниями, и ряд статей, обращенных к школьникам шестых — восьмых классов. Сборник может быть полезен на занятиях математического кружка для младших школьников, для ребят, готовящихся поступать в физико-математические классы, и для всех любителей поломать голову над несложной технической, но хитроумной задачей.

ЗАДАЧИ ЗАОЧНЫХ КОНКУРСОВ

1990/91 учебный год

1. Составьте из всех десяти цифр 0, 1, 2, ..., 9 такое десятизначное число, что число из двух его первых цифр делится на 2, из трех первых цифр — на 3 и так далее, а само число делится на 10.

2. Докажите, что

а) число $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times 1987 \times 1989 + 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 1988 \times 1990$ делится на 1991;

б) число $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 1990 \times 1992 - 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times 1989 \times 1991$ делится на 1993.

3. В три магазина привезли 1990 книг. В первые три дня один магазин продал соответственно $1/37$, $1/11$ и $1/2$ часть полученных книг, второй магазин — $1/57$, $1/9$ и $1/3$ полученных книг, третий магазин — $1/25$, $1/30$ и $1/10$ полученных книг. Сколько книг получил каждый магазин?

4. Найдите наименьшее натуральное число, которое оканчивается на 56, делится на 56 и имеет сумму цифр, равную 56.

5. На шахматной доске расставлены фигуры так, что на каждой горизонтали и вертикали стоит не меньше двух фигур. Всегда ли можно снять с доски несколько фигур так, чтобы на каждой горизонтали и вертикали осталось ровно по одной фигуре? Исследуйте тот же вопрос в случае, когда на каждой горизонтали и вертикали первоначально стоят ровно две фигуры.

6. В клетки квадрата 3×3 поставлено 9 чисел. Такой квадрат называется магическим, если сумма чисел на каждой горизонтали, на каждой вертикали и на каждой из двух диагоналей — одна и та же. Докажите, что у магического квадрата сумма квадратов чисел верхней строки равняется сумме квадратов чисел нижней строки.

7. На листе клетчатой бумаги отмечено 100 узлов — вершины клеток, образующих квадрат 9×9 . Двое игроков по очереди соединяют вертикальным или горизонтальным отрезком два соседних отмеченных узла. Игрок, после хода которого образу-

ется квадратик, закрашивает его в свой цвет. Выигрывает тот, кто закрасит больше квадратиков. Существует ли выигрышная стратегия у первого игрока? У второго игрока? Если да, то какая?

8. В строчку записаны 1990 чисел, равных 1 или -1 . Снизу между каждыми двумя числами запишем их произведение; получится новая строка, состоящая из 1989 чисел. Будем продолжать эту операцию, пока не останется строчка из одного числа. Докажите, что если в первой строке хотя бы одно число равно -1 , то в полученном числовом треугольнике количество таких чисел не менее 1990.

9. Точка на плоскости, имеющая координаты $(a; b)$, соединяется отрезками с точками $(a - b; a)$ и $(a; b - a)$. Можно ли с помощью таких отрезков связать непрерывными ломаными точки

а) $(19; 90)$ и $(1990; 3383)$;

б) $(234; 1001)$ и $(611; 7007)$?

10. Имеются 9 кг крупы и чашечные весы с гирями в 50 г и 200 г. Как отвесить 2 кг крупы за три взвешивания? Можно ли это сделать, если имеется только гиря в 200 г?

11. Докажите, что высота треугольника, опущенная на его большую сторону, не больше суммы длин перпендикуляров, опущенных из произвольной точки этой стороны на две другие стороны этого треугольника.

12. Найдите три девятизначных числа, в записи каждого из которых встречаются все цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, и при этом сумма некоторых двух чисел равна третьему.

13. Бабушка раздавала внукам яблоки. Первому внуку она дала 1 яблоко и $1/10$ часть оставшихся, второму — 2 яблока и $1/10$ часть оставшихся, третьему — 3 яблока и $1/10$ часть оставшихся и так далее до тех пор, пока яблоки не кончились. Оказалось, что все внуки получили яблок поровну. Сколько было внуков и по сколько яблок они получили?

14. Телефонные номера в городе N состоят из пяти цифр, причем первая цифра не является нулем. Счастливым называется такой номер, в котором все цифры различны и расположены в убывающем или возрастающем порядке. (Например, 12345 — счастливый номер, а 11234 или 10234 — нет.) Найдите число всех счастливых номеров в городе N .

15. Найдите все натуральные числа n , обладающие следующим свойством: если x_1, x_2, \dots, x_n удовлетворяют равенству

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0, \text{ то } x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = n \cdot x_1 x_2 \dots x_n.$$

16. Слово **МАРШРУТ** можно прочесть на рисунке 1 разными способами. Сколько таких способов? Какую букву нужно убрать, чтобы количество способов равнялось 145?

17. Несколько тракторов вспахивают поле в 300 га за целое число дней, причем каждый трактор вспахивает в день 15 га. Сколько тракторов потребуется для того, чтобы выполнить работу на 6 дней раньше?

18. В ромбе $ABCD$ угол A равен 60° . На стороне CD взята точка M , а на стороне AD — точка N так, что в треугольнике BNM один из углов равен 60° . Докажите, что тогда и остальные углы этого треугольника содержат по 60° .

19. На плоскости расположен равнобедренный треугольник ABC . Укажите все такие точки M этой плоскости, для которых оба треугольника ABM и ACM — равнобедренные.

20. Андрей делит по своему усмотрению кучку из 200 спичек на 6 кучек (каждая из них содержит по крайней мере одну спичку), а затем Борис выравнивает количество спичек в двух из этих кучек, беря несколько спичек из одной из кучки. Число спичек, взятых Борисом, назовем выигрышем Андрея. Борис стремится взять как можно меньше спичек. Как надо играть Андрею, чтобы обеспечить себе максимально возможный выигрыш?

21. На шахматной доске горизонтали и вертикали пронумерованы числами от 1 до 8. На ней расставлены 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. Для каждой ладьи вычислим произведение номеров горизонтали и вертикали, на которых она стоит. Возьмем сумму этих произведений. Докажите, что для расстановки ладей, центрально-симметричной данной, полученная аналогичным образом сумма равняется первоначальной.

22. В треугольнике ABC угол A равен 60° , а прилежащие к нему стороны равны 2 и 3. Разрежьте его на три куса так, чтобы из них можно было сложить правильный шестиугольник.

23. Найдите два семизначных числа такие, что их сумма, их разность и сумма цифр одного из них являются факториалами некоторых чисел.

24. Докажите, что не существует двух (отличных от параллелограмма) трапеций таких, что боковые стороны каждой из них соответственно равны основаниям другой.

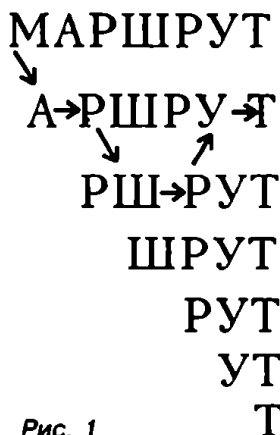


Рис. 1

25. Найдите четырехзначное число, сумма цифр которого равна разности между 2011 и самим числом.

26. Имеется лист бумаги. Его можно разрезать на 6 или 12 частей. Каждый новый кусок можно разрезать также на 6 или 12 частей или оставить целым и так далее. Можно ли таким образом разрезать лист на 40 частей? Докажите, что можно получить любое число частей, большее 40.

27. Найдите пять чисел, если известно, что их суммы по 3 соответственно равны 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15, 17.

1991/92 учебный год

28. У лифта на 1-м этаже 18-этажного дома собрались 17 школьников, которым нужно подняться вверх, причем на разные этажи. Лифтер согласен сделать лишь один рейс на любой этаж, а дальше пусть они идут пешком. Лифт способен вместить всех школьников. Известно, что все школьники с одина-

	1	2	3	4	5	6	7	8	В	Н	П	М
1	4		0:0									3:
2		1:1										4:
3			2:2			1:1			0			1:
4				3:3								4:
5					4:4				1	1	2	2:2
6						5:5			0	1	3	1:4
7							6:6				3	0:3
8								7:7	0	0	4	5:

Рис. 2

ковым неудовольствием спускаются на один этаж и с двойным неудовольствием поднимаются пешком на один этаж. Какой этаж нужно выбрать, чтобы суммарное неудовольствие было наименьшим?

29. Восемь команд провели в футбольном турнире по четыре игры каждая. На рисунке 2

изображена частично заполненная таблица результатов этих игр. Закончите ее заполнение по результатам сыгранных матчей.

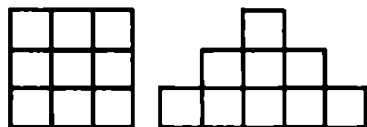


Рис. 3

30. Из девяти одинаковых квадратных карточек сначала сложили квадрат, а потом пирамиду (рис.3). Оказалось, что при этом всякие две карточки, которые имели две общие вершины в первом расположении, сохранили

одну из них общей (ту же самую) и во втором расположении. Покажите, как это было сделано.

31. В левой части равенства $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10 = 7$ расставьте скобки так, чтобы равенство стало верным.

32. Дорожная шахматная доска имеет небольшой бортик по

границам игрового поля, не позволяющий фигурам соскальзывать. Пусть имеется еще комплект домино, каждая кость которого покрывает ровно две соседние клетки доски. Можно ли уложить комплект домино на этой доске так, чтобы ни одну из костей нельзя было сдвинуть с места в плоскости доски?

33. Через точку P внутри равностороннего треугольника проведены прямые, проходящие через его вершины. Эти прямые разбивают его на 6 треугольников (см. рис. 4). Оказалось, что сумма площадей черных треугольников равняется сумме площадей белых треугольников. Докажите, что точка P лежит на одной из медиан этого треугольника.

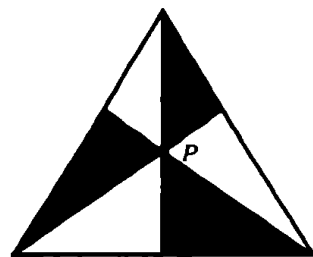


Рис. 4

34. Число 1,5 интересно тем, что оно в 4 раза меньше суммы своих цифр. Найдите число, которое в 8 раз меньше суммы своих цифр.

35. На листе бумаги размером 3×4 сделали надрез так, что он при этом не распался, но им стало возможно оклеить кубик $1 \times 1 \times 1$ в два слоя. Как это сделали?

36. Три школьника, у каждого из которых было несколько бумажных рублей, подошли к киоску с мороженым. Петя, имевший меньше всех — всего 1 рубль — купил две порции и ушел. Остальные двое решили купить как можно больше мороженого. Оказалось, что Коля смог бы купить 6 порций, а Вася — 11 порций. Если же они сложили бы свои капиталы, то на 18 порций им все равно не хватило бы. Сколько стоит порция мороженого в этом киоске?

37. 50 гангстеров стреляют одновременно. Каждый стреляет в ближайшего к нему гангстера (или в одного из ближайших, если несколько человек находятся на одинаковом расстоянии от него) и убивает его наповал. Найдите наименьшее возможное число убитых. (Гангстеры — различные точки плоскости.)

38. Найдите наименьшие значения для сторон прямоугольника, если стороны всех квадратов, на которые он разбит (рис. 5), являются целыми числами.

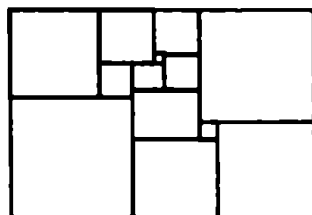


Рис. 5

39. Замените буквы цифрами так, чтобы соотношение

$$\text{ХРУСТ} \times \text{ГРОХОТ} = \text{PPPPPPPPPP}$$

оказалось верным (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.)

40. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AB и BC взяты точки M и N так, что $AM = CB$ и $BM = CN$. Докажите, что угол между отрезками AN и CM равен 45° .

41. Один чудаковатый часовщик смастерил странные часы. От полуночи до часа они идут нормально, показывая верное время, но затем часовая стрелка начинает идти со скоростью минутной, а минутная со скоростью часовой. Через час стрелки вновь меняются скоростями, и так каждый час. Укажите все моменты времени, когда часы показывают верное время.

42. Двенадцать собеседников совещаются за круглым столом. После перерыва они снова сели за этот стол, но в другом порядке. Докажите, что найдутся такие два собеседника, что между ними (считая от первого ко второму по часовой стрелке) во второй раз окажется столько же собеседников, что и в первый раз.

43. На полосу положили квадрат, сторона которого равна ширине полосы, притом так, что его граница пересекла границу плоскости в четырех точках. Докажите, что две прямые, проходящие накрест через эти точки, пересекаются под углом 45° .

44. Калиф Гарун-аль-Рашид одарил троих придворных астрологов десятью кошельками. Мудрецы, сев подсчитывать доход, обнаружили, что один из кошельков пуст, во втором лежит одна таньга, в третьем — две, и так далее до десятого, в котором оказалось девять таньга. Гусейн Гуслия взял себе два кошелька. Абдурахман ибн Хоттаб и его брат Омар Юсуф поделили оставшиеся кошельки так, что более заслуженный и умудренный годами Абдурахман получил большую сумму денег. По дороге на Омара Юсуфа напали разбойники и отняли четыре кошелька, так что от подарка калифа осталось лишь 10 таньга. Какие кошельки достались Гусейну Гуслия?

45. Имеется неограниченный запас монет в 1, 2, 5, 10, 20, 50 копеек и в 1 рубль. Известно, что сумму в A копеек можно уплатить B монетами. Докажите, что сумму в B рублей можно уплатить A монетами.

46. В футбольном турнире участвовали 15 команд. Каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Могло ли случиться, что число побед у каждой команды оказалось равным числу ее ничьих? Какой будет ответ, если в турнире участвовали 16 команд? 17 команд?

47. Ивашка Кудряшкин из рассказа Аркадия Гайдара «Горячий камень» обнаружил на камне загадочную печать — два креста, три хвоста, дырка с палочкой и четыре запятые (рис.6).

Допустим, что это — зашифрованная запись десятизначного числа, являющегося полным квадратом. Какую цифру означает дырка с палочкой?

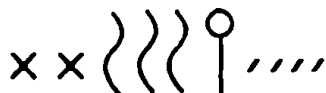


Рис. 6

48. Равносторонние треугольники

ABC и PQR расположены так, что вершина C лежит на стороне PQ , а вершина R — на стороне AB . Докажите, что прямые AP и BQ параллельны.

49. Используя каждую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по одному разу, составьте такие два пятизначных числа, чтобы их произведение было максимальным.

50. Шахматную доску покрыли костяшками домино, каждая из которых покрывает ровно две клетки. Восемь костяшек покрывают восемь клеток одной из диагоналей доски; при этом одни костяшки покрывают еще одну клетку выше диагонали, а другие — еще одну клетку ниже ее. Докажите, что при любом покрытии доски тех и других костяшек будет поровну.

51. По поверхности стола перекачивают кубик, переворачивая его через ребра. Можно ли кубик перевернуть по одному разу через каждое ребро так, чтобы в итоге он оказался на прежнем месте?

1992/93 учебный год

52. Если вечером на Поле Чудес закопать золотые монеты, то к утру на их месте вырастут одинаковые деревья с золотыми монетами на ветвях. Буратино пришел на Поле Чудес в понедельник, имея 5 золотых монет. Он хочет получить не менее 1992 монет. Вырастив первые деревья, он понял, что сможет добиться своего не раньше среды, но не позже пятницы. Сумеет ли он оказаться владельцем ровно 1992 монет?

53. Целые числа a , b и c таковы, что $ab + bc + ca = 0$. Докажите, что число abc может быть представлено в виде произведения квадрата целого числа на куб целого числа.

54. Правильный треугольник со стороной n разбит прямыми, параллельными сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Найдите число правильных треугольников с вершинами в узлах получившейся сетки.

55. Гавиал, бегемот, пеликан и кашалот съели в общей сложности 37 рыб, причем кашалот съел во столько же раз больше пеликана, во сколько пеликан съел больше гавиала. Сколько рыб съел каждый?

56. Внутри треугольника отмечена точка M . Пусть L — длина наибольшего из отрезков, соединяющих точку M с вершинами,

а l — длина наименьшего из отрезков, соединяющих точку M с серединами сторон. Докажите, что $L \geq 2l$.

57. Когда закончился волейбольный турнир (в один круг), оказалось, что каждая команда выиграла столько же матчей, сколько и все побежденные ею команды. Сколько команд участвовало в турнире?

58. В 1988 г. телевидение Анчурии начало демонстрацию телесериала «По колено в слезах», причем в каждом году, начиная с 1989-го, было показано либо на 40% больше, либо на 40% меньше серий, чем в предыдущем. Чтобы не наносить большого ущерба экономике страны, ежедневно показывали не больше двух серий. При просмотре 1230-й серии зрители были опечалены ссорой главных героев, но ровно через два года, в 1992 г., порадовались их счастливому примирению в последней серии. Сколько серий содержал этот замечательный телефильм?

59. Укажите хотя бы одно шестизначное число, являющееся кубом, такое, что все числа, получающиеся из него циклическими перестановками цифр, делятся на кубический корень из этого числа.

60. Каждая грань кубика разбита на четыре квадрата. Всякий отрезок, являющийся общей стороной двух из 24 полученных квадратов, окрашен в синий или красный цвет. Известно, что красных отрезков 26. Докажите, что на поверхности кубика найдется замкнутая ломаная линия, состоящая только из красных отрезков.

61. Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} 2 & \text{ делится на } 2^1, \\ 3 \cdot 4 & \text{ делится на } 2^2, \\ 4 \cdot 5 \cdot 6 & \text{ делится на } 2^3. \end{aligned}$$

Сформулируйте общее утверждение и докажите его.

62. Тетрадный лист имеет размеры 33×41 клеток. Можно ли в его клетки записать все числа от 1 до $33 \times 41 = 1353$ так, чтобы в каждом квадратике 2×2 сумма записанных в нем четырех чисел была одна и та же?

63. Таксомоторный парк решил устроить ученикам подшефной школы экскурсию. Когда к дверям школы подъехала колонна микроавтобусов и «Волг», то ребята быстро расселись по 12 человек в каждом «Рафике» и по 7 человек в каждой «Волге». Когда подъехали еще три машины, то школьники пересели так, что в каждой «Волге» стало 6 человек, а в каждом «Рафике» 11. Можно ли заказать еще несколько машин так, чтобы в каждой «Волге» было по 5 школьников, а в каждом «Рафике» по 10?

64. Двое играют в следующую игру. На столе лежит кучка из 12 спичек; играющие по очереди берут из нее одну или две спички, или кладут одну или две спички из ранее взятых, после чего записывают каждый на своем листке количество спичек в кучке, оказавшееся там после его хода. Нельзя делать ход, после которого на листке окажутся написанными два одинаковых числа. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто выиграет в этой игре при правильной стратегии? А если в кучке 13 спичек?

65. Квадраты натуральных чисел выписаны подряд: 149162536... Какая цифра стоит на 1993-м месте?

66. Относительная скорость концов часовой и минутной стрелок некоторых правильно идущих часов в некоторый момент оказалась равной 10 мм/с. Может ли эта скорость в какой-то другой момент оказаться равной 8 мм/с? 12 мм/с?

67. На клетчатой бумаге отмечены три узла A , B и C . Угол ABC равен 45° , а на отрезках AB и BC нет узлов, кроме их концов. Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.

68. Докажите, что при любом натуральном n число

$$(n+1)^{1993} + n^{1993} + (n-1)^{1993} - 3n$$

делится на 10.

69. Написали пятизначное число, затем написали пятизначное число, состоящее из тех же цифр, но идущих в обратном порядке. Из большего числа вычли меньшее и получили число A . Можно ли восстановить число A , зная лишь три его последние цифры?

70. Найдите все тройки натуральных чисел A , B и C , для которых $AB + BC + CA = 2(A + B + C)$.

71. На книжной полке стоит восьмитомник Жюль Верна. Разрешается вытащить том, стоящий либо третьим, либо восьмым, считая слева направо, и поставить его первым. Докажите, что после нескольких таких операций можно поставить тома в правильном порядке, независимо от того, как они стояли первоначально.

72. Из кассы цифр вытащили пять карточек с различными цифрами и составили из этих карточек все возможные трехзначные числа и нашли их сумму. Эта сумма оказалась равной первоначальному пятизначному числу. Какое это было число?

73. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Докажите, что если угол BNM меньше угла ANM , то угол BMN больше угла AMN .

74. Какое наибольшее число дней в году можно выбрать так,

чтобы любые два из них, но не все вместе, пришлись бы либо на один день недели, либо на один месяц, либо на одно число месяца?

75. Развертка куба состоит из шести одинаковых квадратов. А можно ли из пяти одинаковых прямоугольников составить развертку какого-нибудь параллелепипеда?

1993/94 учебный год

76. Докажите, что $1993 \cdot 1995^3 - 1994 \cdot 1992^3$ — куб целого числа.

77. Имеется 8 маленьких грузов массами 1, 2, ..., 8 граммов. Можно ли их разместить в восьми вершинах куба так, чтобы их общий центр масс совпал с центром куба?

78. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник, если известны точка пересечения его медиан, центр описанной окружности и точка ее пересечения с одной из биссектрис.

79. Два последовательных числа являются суммами кубов своих цифр. Какие это числа?

80. Найдите наименьшее положительное число x ,

а) такое, что $\{x^2\} - \{x\}^2 = 1/1993$;

б) такое, что $[x^2] - [x]^2 = 1993$.

(Здесь $[x]$ — целая часть числа x , т.е. наибольшее целое число, не превышающее x , а $\{x\} = x - [x]$ — дробная часть числа x .)

81. Через несколько лет после распада Зюйдвестской империи на 16 независимых княжеств оказалось, что каждое княжество дружит ровно с тремя другими княжествами и враждует с остальными. Восемь соседних государств решили оказать материальную помощь всем княжествам распавшейся империи, каждое — двум дружащим между собой княжествам. Можно ли гарантировать, что такую помощь удастся организовать?

82. Для каких натуральных чисел n и m справедливо соотношение

$$\frac{2}{1993} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} ?$$

83. На доске 1×100 на клетке №50 стоит фишка. Играют двое, каждый может своим ходом передвинуть фишку на одну или две клетки в ту или иную сторону. Запрещается ставить фишку на те клетки, на которых она уже побывала. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его партнер?

84. Существует ли число, оканчивающееся на 11, которое делится на 11 и имеет сумму цифр, равную 11?

85. Биссектриса, медиана и высота, проведенные из вершин A , B и C треугольника ABC , пересекаются в точке O . Докажите, что если AB — наибольшая сторона треугольника, то $BO > AO$, а если наименьшая, то $BO < AO$.

86. Квадрат 4×4 разделен на единичные квадраты. Можно ли представить полученную сетку их периметров как сумму восьми ломаных длины 5? А как сумму пяти ломаных длины 8?

87. Чебурашка и крокодил Гена делят одно и то же натуральное число с остатком. Чебурашка делит его на 8, а Гена — на 9. Частное, которое получил Чебурашка, и остаток, который получил Гена, в сумме дают 13. Какой остаток получился у Чебурашки?

88. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами такой, что его свободный член равен 1995, числа 1 и 5 являются его корнями, при некотором целом значении x равный 1994?

89. В городе Подорожаевске регулярно изменяли цены на проезд в трамвае следующим образом: новая плата за проезд устанавливалась равной прежнему штрафу за безбилетный проезд, а новый штраф приравнивался десятикратной новой плате за проезд. Упрямый Фома принципиально не платил за проезд и в результате был 9 раз оштрафован, кроме того, однажды при уплате штрафа он потерял одну денежную купюру. В итоге он лишился 777 рублей. Какая купюра была утеряна?

90. В таблице 6×6 расставлено 36 чисел так, что сумма чисел по каждой из 22 диагоналей (диагональ может состоять из 1 (угловой), 2, 3, 4, 5 или 6 клеток) одна и та же. Какие значения может принимать эта сумма?

91. Какое из чисел больше: $(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 1993)^2$ или 1993^{997} ?

92. Четыре окружности расположены так, как показано на рисунке 7. В десяти образованных при этом ячейках записали цифры 0, 1, 2, ..., 9 так, чтобы сумма чисел в каждом круге была одна и та же. Какое наибольшее значение может принимать такая сумма?

93. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC взята точка M , а на отрезке MC — точка N так, что $MN = AN$. Известно, что углы BAM и NAC равны. Найдите величину угла MAC .

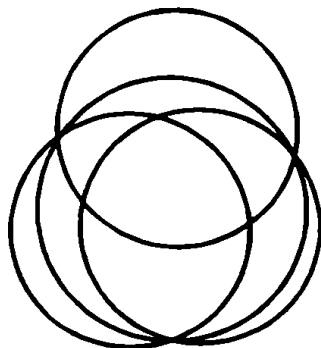


Рис. 7

94. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не оканчивающихся нулем, сумма цифр которых равняется сумме цифр их квадратов.

95. На шахматной доске расставьте 16 черных и 16 белых фигур так, чтобы на каждой горизонтали, на каждой вертикали и на каждой диагонали количество черных фигур равнялось количеству белых. Удастся ли вам это сделать с 15-ю черными и 15-ю белыми фигурами?

1994/95 учебный год

96. Первый член последовательности чисел равен 439, каждый следующий равен сумме цифр предыдущего, умноженной на 13. Чему равен 99-й член этой последовательности?

97. Укажите все натуральные числа, произведение цифр которых больше 885, но меньше 895.

98. В квадрате со стороной a проведены отрезки AN , BK , CL и DM так, что площадь заштрихованного четырехугольника равна сумме площадей черных треугольников (рис.8). Докажите, что $AM + BN + CK + DL = 2a$.

99. Целые числа A , B и C таковы, что $A(A + B) = B(B + C) = C(C + A)$. Докажите, что $A = B = C$.

100. На пульте находятся 100 светящихся кнопок, расположенных в виде квадрата 10×10 . Табло устроено так, что при нажатии на произвольную кнопку она и все кнопки в одном с ней

ряду и в одном столбце меняют свое состояние: светящиеся кнопки гаснут, а негорящие — загораются. Какое наименьшее число кнопок нужно нажать, чтобы все кнопки оказались погашенными, если первоначально они светились?

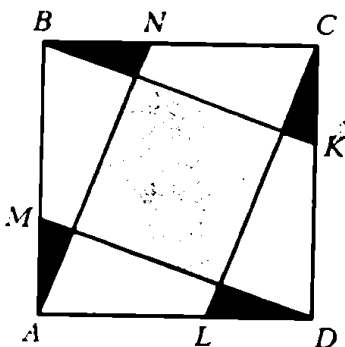


Рис.8

101. Найдите все натуральные числа, которые нельзя представить в виде суммы нескольких (не менее двух) последовательных натуральных чисел.

102. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ таков, что точка пересечения биссектрис углов DAC и DBC лежит на стороне CD . Докажите, что точка пересечения биссектрис углов ADB и ACB лежит на стороне AB .

103. Палиндромом называется слово, которое не меняется, если его прочесть в противоположном направлении, например,

КАЗАК, ШАЛАШ. Пусть задано слово, состоящее из 1995 букв, причем в нем присутствуют только буквы А и Б. Докажите, что его можно разбить не более чем на 800 палиндромов.

104. Укажите на шахматной доске 8×8 маршрут короля, при котором он обходит все клетки по одному разу, чередуя диагональные и недиагональные ходы. Возможен ли такой маршрут на доске 9×9 ?

105. Имеется 6 одинаковых с виду монет, некоторые из них фальшивые — более легкие. Как с помощью не более чем четырех взвешиваний на чашечных весах без гирь найти все фальшивые монеты?

106. Найдите все натуральные числа, которые равны удвоенной сумме некоторых двух своих различных делителей.

107. Компания из восьми человек семь раз садилась за круглый стол. Могло ли случиться, что любые двое при этом ровно два раза сидели рядом?

108. На плоскости расположено несколько окружностей. Известно, что окружностей не меньше пяти и любые три из них имеют общую точку. Докажите, что все эти окружности имеют общую точку.

109. Докажите, что число $1991 \times 1993 \times 1995 \times 1997 + 16$ является полным квадратом.

110. На плоскости даны две окружности. Прямая AB проходит через центр первой окружности и касается второй, а прямая CD проходит через центр второй окружности и касается первой (рис. 9). Докажите, что отрезки AD и BC параллельны.

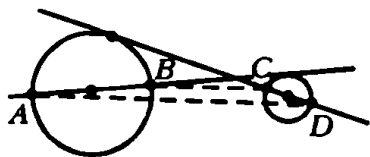


Рис. 9

111. На шахматной доске поставлено n ферзей, n королей и n слонов так, что ни одна фигура не бьет другую. При каком наибольшем n это возможно?

112. Существуют ли 1995 натуральных чисел, сумма которых равна их произведению?

113. А и В играют на клетчатой доске 1×9 . А нумерует клетки числами от 1 до 9, после чего В ставит фишку на любую из клеток. Затем игроки поочередно перемещают фишку каждый раз в одну из соседних клеток. На каждой клетке фишка может побывать не больше раз, чем число, написанное на этой клетке. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

114. Дан треугольник ABC . Докажите, что в его плоскости

существует единственная точка M такая, что $MA + BC = MB + AC = MC + AB$.

115. В таблице 9×9 расставлены числа $1, 2, \dots, 81$. Вам предлагается узнать эту расстановку. Разрешается спросить о том, какие числа находятся в указанном вами квадрате, стороны которого проходят по линиям сетки. За какое наименьшее число вопросов можно всегда восстановить расстановку?

1995/96 учебный год

116. С тройкой чисел можно производить следующую операцию: взять два из них и заменить их на среднее арифметическое и среднее геометрическое этих двух чисел, а третье оставить без изменения. Можно ли, несколько раз применив эту операцию, получить из тройки чисел $2 - \sqrt{2}$, 1 , $2\sqrt{2} + 3$ тройку $\sqrt{2} - 1$, 2 , $3\sqrt{2} - 1$?

117. На гипотенузе AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC взяты точки M и K (K между C и M) такие, что угол MBK равен 45° . Докажите, что $MK^2 = AM^2 + KC^2$.

118. Найдите какое-нибудь натуральное число, которое при делении на все натуральные числа от 2 до 10 включительно дает остаток, не меньший половины делителя. А каково наименьшее такое число?

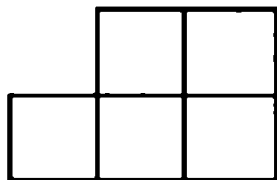


Рис. 10

119. Можно ли фигурками из пяти клеточек 1×1 , изображенными на рисунке 10, замостить прямоугольник 7×15 ?

120. На шахматной доске расставлены 11 коней так, что никакие два не бьют друг друга. Докажите, что можно поставить еще одного коня так, чтобы вновь никакие два коня не били друг друга.

121. Число 1995 представьте в виде суммы наибольшего количества последовательных натуральных чисел.

122. Рассмотрим число, записываемое n девятками. Чему равна сумма цифр куба этого числа?

123. На доске записаны в ряд числа $1, 2, \dots, 1995$. Сначала стирают с доски все нечетные числа. Из оставшихся стирают все числа, стоящие на четных местах. Затем снова стирают числа, стоящие на нечетных местах и т.д., пока не останется единственное число. Какое это число?

124. Натуральные числа A, B, C и D удовлетворяют условиям $A + B = C + D = 1000$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $A/C + B/D$.

125. Вершины M, N, P и Q параллелограмма $MNPQ$ лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что $AM : MB = BN : NC = CP : PD = DQ : QA = 1 : 2$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

126. Во время длительного полета некоторые члены экипажа космического корабля поссорились и перестали разговаривать друг с другом. В таблице (рис.11) цифрой 1 обозначено, что данные люди еще не поссорились, а 0 означает, что они не разговаривают друг с другом. Радист А узнал некоторую новость о событиях на Земле и сообщил ее одному из тех, кто с ним разговаривает (т.е. Г или Ж), тот еще одному и т.д. Последним узнал новость Е. Каким путем пришла к нему эта новость?

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И
А	-	0	0	1	0	0	1	0	0
Б	0	-	1	1	1	1	1	1	1
В	0	1	-	0	0	0	1	1	0
Г	1	1	0	-	1	0	1	0	1
Д	0	1	0	1	-	0	1	0	1
Е	0	1	0	0	0	-	0	0	1
Ж	1	1	1	1	1	0	-	0	0
З	0	1	1	0	0	0	0	-	0
И	0	1	0	1	1	1	0	0	-

Рис. 11

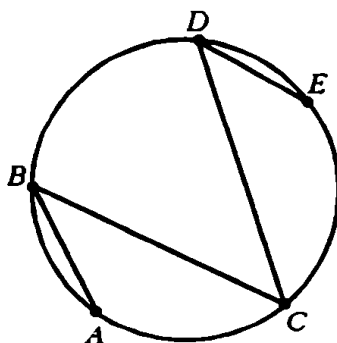


Рис. 12

127. У ломаной $ABCDE$ все вершины лежат на окружности (рис.12). Углы ABC, BCD и CDE равны по 45° . Докажите, что $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$.

128. Поля шахматной доски занумерованы, как показано на рисунке 13. Расставьте на этой доске несколько ферзей так, чтобы они не угрожали друг другу, а сумма номеров полей, на которых они стоят, была наибольшей.

129. Докажите, что для любого целого числа k , большего 1, найдутся такие k различных натуральных чисел, что произведение любых двух из них делится на разность этих двух чисел.

130. Натуральные числа l, m и n таковы, что $lm + ln = mn$. Докажите, что $\text{НОД}(l, m) + \text{НОД}(l, n) = \text{НОД}(m, n)$.

1	2	3	4	5	6	7	8
16	15	14	13	12	11	10	9
17	18	19	20	21	22	23	24
32	31	30	29	28	27	26	25
33	34	35	36	37	38	39	40
48	47	46	45	44	43	42	41
49	50	51	52	53	54	55	56
64	63	62	61	60	59	58	57

Рис. 13

131. Отец и сын катаются по кругу на катке. Время от времени отец обгоняет сына. Когда сын стал двигаться по кругу в противоположном направлении, они стали встречаться в 5 раз чаще. Во сколько раз отец бежит на коньках быстрее своего сына?

132. Квадрат, вписанный в круг с радиусом 5, разделен на несколько одинаковых квадратинов. После того, как из квадрата удалили два маленьких квадратика, оставшуюся часть удалось поместить в круг радиусом 4. Можно ли убрать еще один квадратик так, чтобы остаток помещался в круге радиусом 3?

133. Во дворце императора по кругу было установлено 10 золотых скульптур. Император, страстный любитель искусства и математики, повелел между каждыми двумя соседними скульптурами установить шар, масса которого равняется разности масс этих скульптур. Придворный математик заметил, что в таком случае можно часть этих шаров положить на одну чашку весов, а остальные на другую чашку так, что весы окажутся в равновесии. Прав ли он?

134. В шахматном матче между городами Васюки и Арбатов с каждой стороны участвовало по 1996 шахматистов. Организаторы матча решили, что система, при которой первый играет с первым, второй со вторым и т.д., слишком скучна и решили разбить игроков на пары так, чтобы сумма номеров игроков в каждой паре была квадратом целого числа. Возможно ли такое разбиение?

135. Найдите все пары натуральных чисел x и y , для которых выполняются следующие три условия:

1. $3x$ при делении на y дает в остатке 1;
2. $3y$ при делении на x дает в остатке 1;
3. xy при делении на 3 дает в остатке 1.

1996/97 учебный год

136. Рассмотрим следующую числовую последовательность:

$$12 + 34, 56 + 78, 910 + 1112, 1314 + 1516, \dots$$

Сколько чисел в этой последовательности делится на 4?

137. В прямоугольном треугольнике ABC проведены биссектрисы острых углов AP и BQ , а в треугольниках ACP и BCQ — медианы CM и CN соответственно. Докажите, что сумма углов CMP и CNQ равна сумме углов MPQ , NCM и PQN .

138. Гангстеры ограбили редакцию научно-популярного журнала «Квантум», похитив большую пачку свежееотпечатанных

номеров, что нанесло ущерб, превышающий две с половиной тысячи долларов. Седьмую часть похищенного бандиты успели распродать к моменту их поимки, а оставшиеся экземпляры были возвращены владельцам.

Чтобы уменьшить потери, редакция была вынуждена продавать каждый возвращенный журнал на 60 центов дороже, но это не возместило убытка. После того, как сотрудник журнала «Квант» пожертвовал страдальцам 1 доллар, урон был с лихвой компенсирован.

Сколько стоил журнал «Квантум» до подорожания?

139. Докажите, что если $(x + y + z)(xy + yz + zx) = xyz$, то $(x + y)(y + z)(z + x) = 0$.

140. 49 кнопок расположены в виде квадрата 7×7 . Каждая из них может либо светиться, либо быть погашенной. При нажатии на любую из кнопок меняется состояние этой кнопки и всех соседних с ней по горизонтали, вертикали и диагоналям. Докажите, что можно погасить все кнопки, независимо от того, какие кнопки светились первоначально.

141. Рассмотрим полный набор косточек домино, в котором числа на половинках косточек могут принимать значения от 0 до n . Какое наибольшее число косточек может быть выложено в соответствии с правилами?

142. Найдите все натуральные числа, которые нельзя представить в виде суммы нескольких (не менее двух) последовательных натуральных чисел.

143. Все углы некоторого 19-угольника кратны 10° . Докажите, что у этого 19-угольника есть пара параллельных сторон.

144. Пять очаровательных девушек Аня, Белла, Вера, Галя и Даша вышли в финал конкурса «Мисс «Квант»-96». Один из журналистов спросил Дашу: «Кто старше: Вы или Белла?». На что получил следующий ответ:

«Если я старше Ани, то я либо старше Беллы, либо моложе Веры. Если же я не старше Беллы, то я моложе Гали. Если я моложе Гали и старше Ани, то я не моложе Веры. Если я моложе Гали и не старше Беллы, то я старше Ани».

Каков правильный ответ на вопрос журналиста?

145. На полке стоят 8 книг разного размера. Некто берет две первые книги слева, сравнивает их размеры и ставит большую на третье место слева, а меньшую — на последнее. Затем он вновь берет две первые книги слева и проделывает ту же операцию, и т.д.

а) Всегда ли, анализируя результаты этих процедур, можно выяснить, какая из книг является самой большой?

б) Существует ли такая первоначальная расстановка книг, что, анализируя результаты указанных процедур, можно указать последовательность книг в порядке их возрастания?

146. Докажите, что для любого $n \geq 2$ среди чисел, записываемых с помощью n единиц и одной семерки, найдется хотя бы одно составное число.

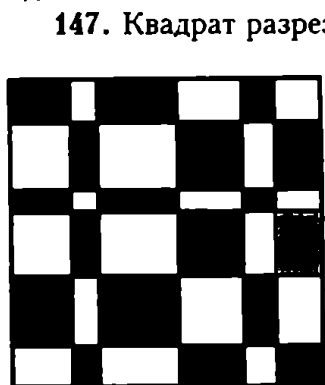


Рис. 14

147. Квадрат разрезан прямыми, параллельными его сторонам, на прямоугольники, которые раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке (рис. 14). При этом оказалось, что общая площадь черных прямоугольников равна площади белых прямоугольников. Докажите, что прямоугольники можно переместить так, что все черные прямоугольники составят один прямоугольник.

148. Возьмем натуральное число A_0 и умножим на сумму его цифр, полученное число A_1 умножим на сумму цифр числа A_1 и получим число A_2 и т.д. Укажите все такие числа A_0 , для которых сумма цифр некоторого числа A_k (а значит, и всех последующих) равна единице.

149. На плоскости даны два равносторонних треугольника ABC и ACO и проведена окружность с центром в точке O , проходящая через точки A и C . Докажите, что для любой точки M этой окружности

$$MA^2 + MC^2 = MB^2.$$

150. В клетчатом квадрате 19×19 закрашено 95 клеток. Докажите, что найдется прямоугольник 3×5 , в котором закрашено не более трех клеток. Покажите, что можно так закрасить 96 клеток, что в каждом прямоугольнике 3×5 будет закрашено не менее четырех клеток.

	1	2	3	4	5	6
1	2	4	6	8	10	12
4	3	6	9	12	15	18
10	4	8	12	16	20	24
20	5	10	15	20	25	30
35	6	12	18	24	30	36
	7	14	21	28	35	42

Рис. 15

151. Таблица Пифагора (таблица умножения) неограниченно продолжается вправо и вниз так, что на пересечении n -й строки и m -го столбца стоит число mn . Рассматриваются суммы чисел, стоящих на диагоналях таблицы (на рисунке 15 указаны суммы на 1-й, 2-й, 3-й, 4-й и 5-й диагоналях).

Докажите, что сумма чисел на 1996-й диагонали оканчивается на 1996.

152. Из вершины квадрата со стороной a по его периметру с постоянной скоростью начинает двигаться точка A . Одновременно из той же вершины со вчетверо большей скоростью по периметру начинает двигаться точка B . Точка M — середина отрезка AB . Какой путь пройдет точка M к моменту, когда точка A вновь попадет в исходную вершину?

153. С числом разрешается проделывать следующую операцию: выбрать цифру в десятичной записи этого числа и прибавить или отнять ее от этого числа. Можно ли с помощью этой операции, примененной несколько раз, из числа 1970 получить число 97?

154. Из шахматной доски вырезали квадрат 4×4 так, что оставшуюся часть оказалось возможным разрезать на прямоугольники 1×3 . Какой квадрат вырезали?

155. В равностороннем треугольнике расположено пять попарно непересекающихся кругов с радиусами 1. Докажите, что в этом треугольнике можно расположить шесть попарно непересекающихся кругов с радиусами 1.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ (ОЧНЫЕ) КОНКУРСЫ

1995 год

23 — 29 августа. База отдыха «Рубское озеро» ИГЭУ. Проводящая организация — Ивановский государственный энергетический университет.

Призеры олимпиады

Диплом 1 степени — *Болтенков А. (Харьков), Шаповалов Д. (Иваново).* **Диплом 2 степени** — *Бойко К. (Харьков).* **Диплом 3 степени** — *Берштейн О. (Харьков), Брут-Бруляко А. (Кострома), Медведев И. (Омск), Степанов А. (Чебоксары), Филатов Е. (Иваново).*

Призеры командного турнира

1. Харьков. 2. Иваново. 3–4. Кострома, Омск.

Задачи олимпиады

156. В конференции принимали участие 19 ученых. После конференции каждый из них отправил 4 или 2 письма участникам этой конференции. Может ли случиться, что каждый из них получит ровно 3 письма?

157. На стороне AB квадрата $ABCD$ со стороной длины a вне его построен равносторонний треугольник ABE . Найдите радиус окружности, проходящей через точки C , D и E .

158. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 1995, в записи которого любые две цифры, стоящие через одну, одинаковы.

159. Докажите, что в произведении $1! \times 2! \times 3! \times \dots \times 99! \times 100!$ можно вычеркнуть один из ста сомножителей так, чтобы произведение оставшихся было точным квадратом.

160. На гипотенузе AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC взяты точки M и K (M между A и K) такие, что угол MBK равен 45° . Докажите, что $MK^2 = AM^2 + KC^2$.

161. Можно ли в клетчатой таблице 13×13 отметить некоторые клетки так, чтобы любая клетка таблицы граничила по стороне ровно с одной из отмеченных клеток?

Задачи математических боев

Вариант 1

162. Найдите углы треугольника ABC , в котором $AB = BC$, а высота AH вдвое короче биссектрисы AK .

163. Докажите, что если числа a , b , c и $(ab + bc + ca)/(a + b + c)$ — целые, то и число $(a^2 + b^2 + c^2)/(a + b + c)$ — целое.

164. Раскрасьте клетки таблицы 3×3 в наибольшее число цветов (каждую клетку — одним цветом) так, чтобы для любых двух цветов нашлись две клетки этих цветов, имеющие общую сторону.

165. Выписаны 9 чисел — длины биссектрис, высот и медиан треугольника. Известно, что среди них не более 4 различных. Докажите, что треугольник равнобедренный.

166. Может ли сумма квадратов 13 последовательных натуральных чисел быть квадратом целого числа?

167. 100 парламентариев, получающих различные зарплаты, сидят в прямоугольном зале в 10 рядах по 10 кресел. Парламентарий считает себя высокооплачиваемым, если, опросив соседей справа, слева, спереди, сзади и по диагоналям, он убеждается, что зарплату больше него получает не более чем один из соседей. Каково наибольшее возможное число парламентариев, считающих себя высокооплачиваемыми?

168. По окончании однокругового волейбольного турнира все команды, участвовавшие в нем, оказалось возможным разбить на k групп так, что суммарное число побед, одержанных командами

каждой группы, одно и то же. Найдите k , если известно, что первая группа состоит из одной команды, вторая — из двух, ..., k -я — из k команд.

169. Расшифруйте равенство СУМК,А + СУМК,А = БАГАЖ. (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные).

Вариант 2

170. В каждом из 1995 полей, расположенных по кругу, записано натуральное число. На одно из полей ставится фишка. Ход состоит в том, что фишку сдвигают по часовой стрелке на число полей, написанное там, где она была, затем увеличивают на 1 число там, куда она пришла. Докажите, что через некоторое время фишка побывает на всех полях.

171. На клетчатой доске 1×100000 (вначале пустой) двое играющих ходят по очереди. Первый может за ход выставить два крестика в любые два свободных поля доски. Второй может стереть любое количество крестиков, идущих подряд — без пустых клеток между ними. Если после хода первого образуется 13 или более крестиков подряд, он выиграл. Может ли первый выиграть при правильной игре обеих сторон?

172. Докажите, что если $xy + z = yz + x = zx + y$, то $(x - y)(y - z)(z - x) = 0$.

173. По кругу сидят рыцари и лжецы — всего 12 человек. Каждый из них сделал заявление: «Все, кроме, быть может, меня и моих соседей — лжецы». Сколько рыцарей сидит за столом, если известно, что лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду?

174. В треугольнике ABC угол A равен 60° , а медиана BM равна высоте CH . Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

175. Существует ли натуральное число, которое в 1995 раз больше суммы своих простых делителей?

176. Пятизначное число, все цифры которого различны, умножили на 4. В результате получилось число, записываемое теми же цифрами, но в обратном порядке. Какое это число?

177. Можно ли клетчатый квадрат 1995×1995 разрезать по клеткам на 10000 прямоугольников с равными диагоналями?

Вариант 3

178. Укажите такие 6 точек на плоскости, любые 5 из которых можно покрыть двумя квадратами с диагоналями по 1, но все шесть нельзя покрыть двумя кругами с диаметрами по 1.

179. В треугольнике ABC угол A равен 30° , а медиана BM равна CH . Найдите углы B и C .

180. Шестизначное число начинается с цифры 1. Если эту цифру перенести в конец числа, то число увеличится в 3 раза. Какое это число?

181. Натуральные числа a , b и c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2$ делится на $ab + bc + ca$, а число $a + b + c$ — простое. Докажите, что $a = b = c = 1$.

182. В левом нижнем углу шахматной доски $n \times n$ ($n \geq 3$) стоит конь. Известно, что наименьшее число ходов, за которое конь может дойти до верхнего правого угла, равно наименьшему числу ходов, за которое он может дойти до нижнего правого угла. Докажите, что $n = 7$.

183. У крестьянина были коза, корова и кобыла, а еще стог сена и сын. Сын подсчитал, что этого сена хватит, чтобы кормить козу и кобылу 1 месяц, или козу и корову $3/4$ месяца, или же корову и кобылу $1/3$ месяца. Отец сказал, что сын плохо учился в школе. Прав ли он?

184. На доске было написано число вида $777\dots77$. Петя стер у этого числа последнюю цифру, полученное число умножил на 3 и к произведению прибавил стертую цифру. С полученным числом он проделал такую же операцию и т.д.. Докажите, что через некоторое время у него получится число 7.

185. Каждая из 12 лампочек, расположенных по кругу, может находиться в двух состояниях: гореть или не гореть. За один ход можно изменить состояние любых трех лампочек, расположенных подряд. Вначале горит ровно одна лампочка. Можно ли добиться того, чтобы горели все лампочки?

Вариант 4

186. Найдите углы треугольника ABC , в котором $AB = BC$, а высота BH вдвое короче биссектрисы AK .

187. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 3$ и $BC = 4$. Сначала точка A перемещается на некоторое расстояние параллельно отрезку BC . Затем точка B перемещается на некоторое расстояние параллельно отрезку AC . И, наконец, точка C перемещается на некоторое расстояние параллельно отрезку AB . В итоге оказалось, что угол B — прямой и $AB = 1$. Чему стала равна длина отрезка BC ?

188. По кругу записаны 8 чисел так, что каждое из них равно сумме трех следующих за ним по часовой стрелке. Докажите, что все эти числа равны нулю.

189. Записав числа $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/10$ в каком-либо порядке, расставьте между ними знаки арифметических действий так, чтобы полученное выражение равнялось 0.

190. Можно ли разрезать квадрат на тысячеугольник и 199 пятиугольников?

191. Каждая из клеток квадрата 5×5 покрашена в один из четырех цветов так, что в любом квадрате 2×2 встречаются все четыре цвета. Каким может быть наибольшее число клеток одного цвета в квадрате 5×5 ?

192. Шесть футбольных команд в однокруговом турнире набрали 12, 10, 9, 8, 7 и 6 очков. Сколько очков начислялось за победу в матче, если за ничью начислялось 1 очко, за поражение — 0?

193. Даны три натуральных числа, сумма любых двух из которых является простым числом. Докажите, что среди данных чисел есть равные.

Вариант 5

194. Пусть A и B — натуральные числа, причем сумма цифр одного из них равна 1993, а другого — 1994. Может ли сумма цифр числа $A + B$ равняться 1995?

195. Можно ли разрезать квадрат на треугольники так, чтобы каждый треугольник граничил (по отрезку) ровно с тремя другими?

196. Брат-старшеклассник спросил у сестренки: «Сколько дней тебе было ровно в три раза меньше лет, чем мне?». «Три дня», — ответила сестра. «А в 4 раза?» — «4 дня.» — «А в 6 раз?» Тут сестренка задумалась. Она знала, что такие дни были, но сколько? Помогите ей ответить.

197. Существуют ли такие два выпуклых четырехугольника, все стороны каждого из которых лежат на серединных перпендикулярах к сторонам другого?

198. Можно ли числа 1, 2, 3, 4, 5 обозначить буквами a, b, c, d, e так, чтобы выполнялось равенство

$$(a + b)(b + c)(c + d)(d + e)(e + a) = \\ = (a + c)(c + e)(e + b)(b + d)(d + a)?$$

199. Отношение двух двузначных чисел умножили на 100. Какое наименьшее целое число могло при этом получиться?

200. Имеется 1800 шариков — по 100 шариков 18 цветов. Первый играющий выбирает один из шариков и дает второму, который помещает его в одну из клеток доски 9×9 . Если при

этом получается 5 шариков одного цвета, стоящих подряд в ряду или столбце, они снимаются с доски и больше в игре не участвуют. Если второму некуда поставить шарик, то он проиграл. Если у первого кончились шарики, то проиграл он. Кто выиграет при правильной игре?

201. В треугольнике ABC проведены биссектриса AK , высота BH и медиана CM . Могут ли они ограничивать равносторонний треугольник (ненулевой площади)?

Вариант 6

202. На доске выписано 10 чисел, среди которых, возможно, есть равные. Оказалось, что среднее арифметическое любых трех из них уже есть на доске. Докажите, что все числа равны.

203. Можно ли расставить на шахматной доске числа от 1 до 64 так, чтобы сумма чисел в любых двух клетках, имеющих общую сторону или вершину, не делилась на 4?

204. Внутри квадрата $ABCD$ найдите все точки X , для которых $AX + CX = BX + DX$.

205. В треугольнике ABC угол A — тупой, а перпендикуляры к сторонам AB и AC , восстановленные в точке A , делят сторону BC на три равные части. Найдите углы треугольника ABC .

				T
				A
				B
T	O	B	A	P
				O

Рис. 16

206. Заполните свободные клетки квадрата (рис. 16) буквами A, B, T, O, P так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и на каждой из двух диагоналей все эти буквы встречались по одному разу.

207. Число A вида $100\dots 01$ кратно 19. Докажите, что A кратно 13.

208. Квас заполняет несколько 50-литровых бутылей. Если его разлить в 40-литровые бутылки, то понадобится на 5 бутылей больше, причем одна из них останется неполной. Если же этот квас разлить в 70-литровые бутылки, то их понадобится на 4 меньше, и тоже одна бутылка останется неполной. Сколько имеется кваса?

209. Двое играющих по очереди проводят диагонали в правильном 1995-угольнике. Запрещается проводить диагональ, если она пересекается с уже проведенными. Проигрывает тот, после хода которого образуется четырехугольник, диагонали которого не проведены. Кто выигрывает при правильной игре?

210. Можно ли в вершинах куба расставить различные числа так, чтобы каждое число равнялось сумме трех, соединенных с ним ребрами куба?

211. Из бумажного прямоугольника вырезаны два одинаковых круга. Проведите прямую, делящую получившуюся фигуру на две равновеликие части.

212. Андрей вышел из пункта A в 10 ч 18 мин и, двигаясь с постоянной скоростью, пришел в пункт B в 13 ч 30 мин. В тот же день Борис вышел из B в 9 ч 00 мин и, идя по той же дороге с постоянной скоростью, пришел в A в 11 ч 40 мин. Дорога пересекает реку. Андрей и Борис одновременно подошли к мосту через эту реку, каждый со своей стороны. Андрей ушел с моста на одну минуту позже Бориса. Когда они подошли к мосту?

213. Вершины замкнутой 1995-звенной ломаной совпадают с вершинами правильного 1995-угольника. Докажите, что у этой ломаной найдутся три равных звена.

214. Можно ли подобрать компанию, где у каждого ее члена было бы ровно шесть друзей, а у любых двух — ровно два общих друга?

215. На бесконечном листе клетчатой бумаги двое играющих поочередно красят стороны клеток. Разрешается использовать 8 цветов. Первый стремится к тому, чтобы получилась замкнутая ломаная, любые две соседние стороны которой окрашены в разные цвета. Может ли второй помешать этому?

216. Обозначим через $p(n)$ произведение всех цифр натурального числа n . Вычислите $p(1000) + p(1001) + \dots + p(2000)$.

217. В выпуклый четырехугольник вписан параллелограмм, вершины которого делят стороны четырехугольника в постоянном отношении 1:2 (считая по часовой стрелке). Докажите, что исходный четырехугольник — тоже параллелограмм.

Финал

218. Может ли наименьшее общее кратное двух натуральных чисел равняться их сумме?

219. Дан треугольник ABC . Прямая, параллельная AC , пересекает сторону AB в точке P , медиану AM — в точке T , сторону BC — в точке K . Найдите длину стороны AC , если $PT = 3$, $TK = 5$.

220. На шахматную доску положили 8 доминошек так, что каждая покрывает ровно две соседние клетки. Докажите, что на

доске найдется квадрат, состоящий из четырех клеток, ни одна из которых не покрыта доминошкой.

221. В клетках квадратной таблицы 7×7 расставлены числа 0, 1 и -1 так, что в каждом квадрате 3×3 сумма чисел равна 0.

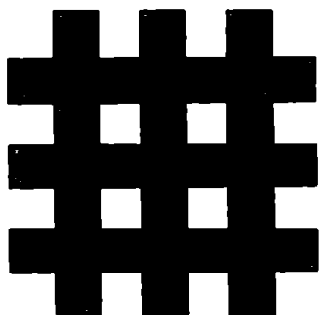


Рис. 17

Найдите наибольшее возможное значение суммы всех чисел в таблице.

222. Докажите, что $1994^2 + 1994^2 \cdot 1995^2 + 1995^2$ — точный квадрат.

223. Можно ли подобрать компанию, где у каждого ее члена было бы ровно пять друзей, а у любых двух — ровно два общих друга?

224. Может ли в выпуклом семиугольнике каждая диагональ быть перпендикулярной какой-либо другой диагонали?

225. На какое наименьшее число прямоугольников можно разрезать данную фигуру (рис.17), если резать разрешается только по границам клеток?

1996 год

15—21 августа. Дом отдыха «Тихий уголок» (Костромская обл.). Проводящая организация — Костромской региональный центр новых информационных технологий.

Призеры олимпиады

Диплом 1 степени — Бойко К. (Харьков), Забирник А. (Харьков), Поярков А. (Рыбинск), Рачков Р. (Нижний Тагил), Филатов Е. (Иваново). **Диплом 2 степени** — Алеев М. (Харьков), Бакшин А. (Иваново), Гаммель Р. (Челябинск), Горелов С. (Челябинск), Звольский С. (Омск), Красненко Е. (Омск), Лузгарев А. (Киров). **Диплом 3 степени** — Есина Е. (Омск), Осипов А. (Чебоксары), Шибанов А. (Киров), Шляхов Н. (Нижний Тагил).

Призеры командного турнира

1. Объединенная команда Кирова, Рыбинска и Ярославля. 2. Челябинск. 3—4. Нижний Тагил, Харьков.

Задачи олимпиады

226. На каждом километре шоссе между селами Елкино и Палкино стоит столб с табличкой, на одной стороне которой

написано, сколько километров до Елкина, а на другой — до Палкина. Боря заметил, что на каждом столбе сумма всех цифр равна 13. Каково расстояние от Елкина до Палкина?

227. Разрежьте прямоугольник 1×5 на 5 частей, из которых можно сложить квадрат.

228. В круге провели несколько (конечное число) различных хорд так, что каждая из них проходит через середину какой-либо другой из проведенных хорд. Докажите, что все эти хорды являются диаметрами круга.

229. Числа a , b , и c таковы, что графики функций $y = ax + b$, $y = bx + c$ и $y = cx + a$ имеют общую точку. Докажите, что $a = b = c$.

230. В кассе купца Калашникова впервые за долгое время появились деньги — 99 монет. Стало известно, что одна из них — фальшивая, отличается по весу от настоящих, которые весят одинаково. Разгневанные работники требуют немедленной выдачи зарплаты, причем настоящими монетами. У приказчика имеются чашечные весы без гирь. Как только становится ясно, что какие-либо монеты — настоящие, они выплачиваются работникам и, естественно, в дальнейших взвешиваниях не участвуют. Любопытный приказчик хочет определить, легче фальшивая монета настоящей или тяжелее. Сможет ли он наверняка это сделать?

231. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M , а биссектрисы углов C и D пересекаются в точке N . Известно, что точки M и N различны, а прямая MN перпендикулярна AB . Докажите, что углы A и B равны.

232. На квадратном клетчатом поле 10×10 расположена эскадра из 10 кораблей. Корабли — это не имеющие общих точек прямоугольники 1×2 со сторонами по линиям сетки. Докажите, что можно сделать 32 «выстрела» так, чтобы наверняка попасть в какой-нибудь корабль.

233. Наименьшее общее кратное некоторых 50 натуральных чисел равно наименьшему общему кратному других 50 натуральных чисел. Могут ли все эти 100 чисел быть последовательными натуральными?

Задачи математических боев

Вариант 1

234. Поле для игры в «морской бой» имеет форму квадрата размером 8×8 клеток. На нем стоит один корабль, имеющий

форму прямоугольника 1×4 . В клетках поля можно устанавливать детекторы, показывающие, накрывает ли корабль эту клетку. Какое наименьшее число клеток нужно снабдить такими детекторами, чтобы по их показаниям можно было однозначно определить положение корабля?

235. Может ли сумма 10000 целых степеней тройки равняться числу 3333?

236. Прямые $ax + by + c = 0$, $bx + cy + a = 0$ и $cx + ay + b = 0$ пересекаются в одной точке с положительными координатами. Найдите эти координаты (перечислите все возможности).

237. Серединные перпендикуляры, проведенные к биссектрисам AA_1 и CC_1 треугольника ABC , пересекаются на стороне AC . Докажите, что $AC^2 = AB \cdot BC$.

238. Петя выписывает числа: начав со своего возраста (в годах), он каждое следующее число получает прибавлением к предыдущему наибольшей его цифры. Может ли среди выписанных чисел встретиться число $10\dots0996$ (где между 1 и 9 вставлено 1996 нулей)?

239. Из горячего крана ванна заполняется за 23 минуты, из холодного — за 17 минут. Маша открыла сначала горячий кран. Через сколько минут она должна открыть холодный, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды налилсь в 1,5 раза больше, чем холодной?

240. На доске выписаны 17 двузначных чисел. Математик возвел одно из них в сотую степень. Оказалось, что полученное число делится на любое из выписанных. Докажите, что тогда оно делится и на произведение всех выписанных чисел.

241. В некотором царстве некоторые города соединены непересекающимися прямыми дорогами так, что между любыми двумя городами есть прямой «как стрела» путь по дорогам (возможно, проходящий через промежуточные города). Соловей-разбойник грабит только на больших дорогах, т.е. на таких прямых путях, на которых находятся все города, за исключением, быть может, одного или двух. Покажите, что в некотором царстве больших дорог может и не быть.

Вариант 2

242. Пусть a , b и n — такие натуральные числа, что $a^{96} + b^{96}$ делится на n и $a^{100} + b^{100}$ делится на n . Докажите, что $a^{1996} + b^{1996}$ тоже делится на n .

243. Длина высоты AB прямоугольной трапеции $ABCD$ равна

сумме длин оснований AD и BC . Докажите, что биссектриса угла ABC делит сторону CD пополам.

244. Таблица 5×5 заполнена числами 1, 2, ..., 25, причем любые два последовательных числа записаны в соседних (имеющих общую сторону) клетках. Какое наибольшее количество простых чисел может оказаться в одном столбце?

245. В арифметическом ребусе $ДУБ + ДУБ + \dots + ДУБ = РОЩА$ требуется разные буквы заменить разными цифрами, одинаковые — одинаковыми. Какое наибольшее число «дубов» может быть в «роще»?

246. Можно ли в клетчатом квадрате 1996×1996 отметить некоторые из клеток так, чтобы любые два квадрата 1000×1000 со сторонами, идущими по линиям сетки, содержали различное число отмеченных клеток?

247. Страшила и Железный Дровосек отправились утром в Изумрудный Город в один день по одной дороге и в одном направлении, причем вначале Дровосек находился на 28 миль позади Страшилы и на расстоянии 100 миль от цели. Оба идут с 8 утра до 8 вечера, и скорость каждого в течение дня постоянна. В первый день Дровосек прошел 20 миль, во второй — 18, в третий — 16, и так далее, а Страшила в первый день прошел 4 мили, во второй — 8, в третий — 12, и так далее. Где и когда они окажутся одновременно?

248. 25 различных натуральных чисел, не превосходящих 1000, таковы, что произведение любых двух из них является точным квадратом. Докажите, что все эти 25 чисел сами являются точными квадратами.

249. В словах ПИФАГОР и ТЕОРЕМА все буквы заменили цифрами (одинаковые — одинаковыми, разные — разными). Получили две последовательности, из семи цифр каждая. Непорядком назовем пару соседних цифр одной из последовательностей, в которой левая цифра больше правой. Какое наименьшее суммарное число непорядков может быть в этих последовательностях?

Вариант 3

250. Управдом Остап Бендер собрал с жильцов деньги на установку новых квартирных номеров. Адам Козлевич заинтересовался, почему у них в третьем подъезде надо собрать денег на 20% больше, чем во втором, хотя квартир во всех подъездах поровну. Не растерявшись, Остап объяснил, что за двузначные номера приходится платить вдвое, а за трехзначные — втрое больше, чем за однозначные. Сколько квартир в подъезде?

251. Учитель записал на доске уравнения

$$a_1x + a_2 = 0, \quad a_2x + a_3 = 0, \quad a_3x + a_4 = 0, \quad a_4x + a_5 = 0, \\ a_5x + a_1 = 0,$$

а также числа $0,1; 0,2; \dots; 0,9; 1; 1,1; \dots; 2$. Он сказал ученикам, что каждое уравнение имеет ровно один корень, причем этот корень находится среди написанных чисел. Петя сказал, что учитель неправ. Прав ли Петя?

252. На координатной прямой отмечены точки с координатами $1, 2, 3, \dots, 99, 100$. Кузнечик начал прыгать с точки 1 и через 99 прыжков оказался в точке 100 , побывав по одному разу в каждой из отмеченных точек. Могла ли суммарная длина всех его прыжков оказаться равной 1996 ?

253. В однокруговом футбольном турнире за победу начислялось 3 очка, за ничью — 1 , за поражение — 0 . Турнир закончился, и очки всех команд были подсчитаны. Матч назовем интересным (соответственно, неинтересным), если он завершился победой команды, у которой в итоговой таблице очков оказалось меньше (соответственно, больше), чем у соперника. Может ли оказаться, что интересных матчей в турнире было больше, чем неинтересных?

254. Из 32 одинаковых костей домино сложен квадрат. Докажите, что можно покрасить по 8 костей красной, синей, желтой и зеленой красками так, чтобы любые две кости, имеющие общий участок границы (ненулевой длины), были окрашены различно.

255. Выберем среди всех натуральных чисел с нечетной суммой цифр те, которые не больше 1000 , и сложим их. Сколько получится?

256. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 1 . На сторонах AB, BC, CD и AD взяты соответственно точки K, L, M и N такие, что $AK + AN + CL + CM = 2$. Докажите, что отрезки KM и LN перпендикулярны.

257. На своем дне рождения Леонард Эйлер угощал друзей треугольным тортом, который он разрезал на 6 кусков по трем биссектрисам. Задержавшемуся Мюнхгаузену достался последний кусок в форме прямоугольного треугольника, на основании чего барон заявил, что торт имел форму равнобедренного треугольника. Прав ли барон?

Вариант 4

258. Некоторые целые числа называются хорошими. Известно, что 1000 — хорошее число, и что если число $53x + 54y$ —

хорошее, то и число $54x + 53y$ — тоже хорошее (x, y — целые). Докажите, что число 1996 — хорошее.

259. 1996 орехов разложены в 20 непустых кучек. Разрешается переложить один орех из кучки А в кучку Б, если в А больше одного ореха и число орехов в А делится на число орехов в Б. Докажите, что такими перекладываниями всегда можно добиться того, чтобы в каждой из 20 кучек стало не менее 3 орехов.

260. У Коли и у Оли были два равных картонных многоугольника. Каждый из них разбил линией свой многоугольник на два и покрасил одну часть в красный цвет, а другую — в синий. Оказалось, что красные многоугольники равны между собой, и синие — тоже. Верно ли, что можно совместить исходные многоугольники так, чтобы границы частей совпали?

261. Каждый из 8 участников шахматного турнира должен сыграть с каждым из остальных. В случае ничьей (и только в этом случае) партия один раз переигрывается с переменной цвета, и результат переигровки заносится в протокол. Может ли случиться, что два участника турнира сыграют по 11 партий, один — 10 партий, три — по 8 партий и два — по 7 партий?

262. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить клетки доски 4×4 (каждую клетку — одним цветом) так, чтобы в каждом квадрате 2×2 нашлась пара клеток одного цвета?

263. Существуют ли такие 1996 попарно взаимно простых чисел, что сумма любых нескольких (не менее двух) различных из них является составным числом?

264. А и В — фиксированные (не диаметрально противоположные) точки окружности. Для каждого диаметра ХУ ($X \neq A$, $Y \neq B$) этой окружности отметим точку пересечения прямых АХ и ВУ. Найдите фигуру, образованную всеми отмеченными точками.

265. Назовем положительное дробное число плохим, если оно не представимо в виде суммы нескольких последовательных членов бесконечной последовательности $\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots, \frac{1}{n(n+1)}, \dots$. Верно ли, что плохих чисел, меньших $\frac{1}{1996}$, бесконечно много?

Вариант 5

266. Пусть $0 < a < b < c < d$. Докажите, что уравнения $x^4 + bx + c = 0$ и $x^4 + ax + d = 0$ не имеют общих корней.

267. На плоскости отмечены несколько (не менее двух) точек.

Назовем отрезок с концами в отмеченных точках четным (соответственно, нечетным), если на нем лежит четное (соответственно, нечетное) число отмеченных точек. Докажите, что четных отрезков больше, чем нечетных.

268. Сумма нескольких натуральных чисел (не обязательно различных) равна 1996. Может ли сумма их обратных величин равняться 1?

269. Какое наибольшее число вершин может иметь многоугольник, все стороны которого лежат на 6 прямых?

270. Докажите, что если уравнение $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = n$ разрешимо в целых числах x, y, z , то и уравнение $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 2n$ разрешимо в целых числах x, y, z .

271. Назовем медианой пятиугольника отрезок, соединяющий его вершину с серединой противоположной стороны (рис. 18). Верно ли, что все пять медиан всякого выпуклого пятиугольника пересекаются в одной точке?

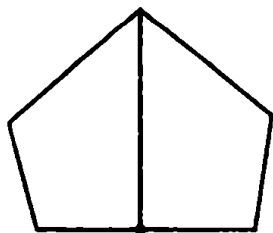


Рис. 18

272. В черноморском казино Остап Бендер играет с крупье в фишки. Игра состоит в том, что игроки по очереди (крупье — первым, Остап — вторым) перекладывают фишки с черного поля стола на красное. За один ход можно переложить не меньше одной фишки и не больше, чем их уже есть на красном поле. Побеждает тот, кто переложил на красное поле последнюю фишку. До начала игры на красном поле лежат 10 фишек, а на черном — некоторое известное Остапу количество (но не ноль). У Остапа в кармане лежат 10 фишек, которые он может до начала игры незаметно подбросить: некоторые — на красное, а некоторые — на черное. Докажите, что он сможет выиграть.

273. На плоскости даны точки A, B и C . Постройте такую окружность с центром в C , чтобы касательная к ней, проходящая через A , была перпендикулярна касательной, проходящей через B .

Вариант 6

274. Имеются 10 монет, массы которых равны 1 г, 2 г, ..., 10 г. Около каждой монеты положили этикетку с указанием веса, однако этикетки каких-то двух монет, массы которых отличаются на 1 г, были перепутаны. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти эти две монеты?

275. Могут ли несколько цифр, выписанных в порядке убывания, образовывать запись натурального числа, кратного 111?

276. Найдите сумму величин углов MAN , MBN , MCN , MDN и MEN , нарисованных на клетчатой бумаге так, как показано на рисунке 19.

277. Замкнутая ломаная линия такова, что любые два ее звена пересекаются. Докажите, что число звеньев этой ломаной нечетно.

278. На некоторых клетках шахматной доски стоит по фишке. Ходом фишки называется перестановка («перепрыгивание») ее через фишку, стоящую на соседней (по горизонтали, вертикали либо диагонали) клетке, непосредственно за которой на той же линии имеется свободная клетка. Какое наибольшее число фишек может насчитывать такое их расположение на доске, в котором любая из фишек может сделать первый ход?

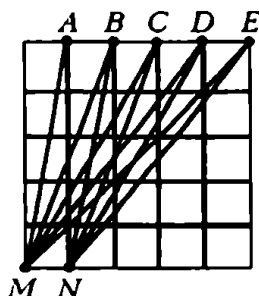


Рис. 19

279. Один из углов треугольника равен 30° . Докажите, что радиус окружности, описанной около этого треугольника, меньше половины его периметра.

280. Фирма «Id Software» плодит монстров. Каждый день монстры мутируют. Если сегодня монстр имеет m ручек и n ножек, то завтра он будет иметь $2m - n$ ручек и $2n - m$ ножек. Монстр погибает, когда число ручек или ножек становится отрицательным. Докажите, что монстр может жить вечно, только если у него число ручек равно числу ножек.

281. На доске написано выражение $ax = b$. Первый играющий называет два различных числа (по порядку), второй подставляет по своему усмотрению одно из них вместо a , другое — вместо b . Получается уравнение. Если первое названное число удовлетворяет ему, выигрывает первый, иначе — второй. Кто выигрывает при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его партнер?

*Вариант дополнительного (письменного)
отборочного состязания*

282. Верно ли, что числа $3^{2 \times 3^m} + 3^{3^m} + 1$ и $3^{2 \times 3^n} + 3^{3^n} + 1$ при любых различных натуральных m и n взаимно просты?

283. Какое наименьшее число коней можно расположить на шахматной доске так, чтобы любая белая клетка находилась под боем хотя бы одного из этих коней?

284. Дан параллелограмм, на каждой из сторон которого отмеченно по точке. Всегда ли, пользуясь только циркулем, можно определить, равна ли площадь четырехугольника с вершинами в отмеченных точках половине площади параллелограмма?

285. Верно ли, что из любого 100-значного числа можно вычеркнуть одну цифру так, чтобы в получившемся числе количество семерок на четных (справа) местах было не больше количества семерок на нечетных местах?

286. Верно ли, что с помощью 1996 гирь массами 1, 5, 25, 125, 625, ..., 5^{997} граммов (гирь каждого вида по 2 штуки) можно взвесить на чашечных весах без делений любой предмет, который весит целое число граммов и не тяжелее всех гирь, вместе взятых?

287. В школе учатся 1996 ребят. Каждому из них нравятся ровно k из остальных 1995 учащихся. При каких значениях k можно утверждать, что обязательно найдутся два ученика этой школы, которые или оба нравятся друг другу, или оба не нравятся друг другу?

Полуфиналы

288. Докажите, что если $(x + y + z)(xy + yz + zx) = xyz$, то $(x + y)(y + z)(z + x) = 0$.

289. На каждой грани кубика написано число. Для любых двух смежных граней рассмотрим модуль разности написанных на них чисел. Докажите, что 12 полученных чисел можно разбить на две группы по 6 чисел с равными суммами.

290. Треугольники ABC и OBC оба равносторонние. Точка M лежит на окружности с центром O и радиусом OB . Докажите, что $MB^2 + MC^2 = MA^2$.

291. Требуется изготовить проволочную сетку в виде квадрата 8×8 , разбитого на единичные квадратные ячейки. Можно ли спаять ее, использовав в общей сложности 36 заготовок — единичных квадратиков и прямых уголков с плечами длины 2?

292. 15 команд играют турнир в один круг. Докажите, что в некотором матче встретятся команды, сыгравшие перед этим в сумме нечетное число матчей.

293. Петя разрезал прямоугольный лист бумаги по прямой. Затем он разрезал по прямой один из двух получившихся кусков. Затем он проделал тоже самое с одним из трех получившихся кусков, и т.д. Докажите, что после достаточного количества разрезов можно будет выбрать среди получившихся кусков

100 многоугольников с одинаковым числом вершин (например, 100 треугольников, или 100 четырехугольников, и т.д.).

294. В треугольнике ABC проведена медиана CM . Серединные перпендикуляры к отрезкам AM и BC пересекаются в точке P , а серединные перпендикуляры к отрезкам AC и BM — в точке Q . Докажите, что отрезок PQ перпендикулярен CM .

295. Существуют ли натуральные числа M и N такие, что в M часов N минут угол между часовой и минутной стрелками часов равняется MN° ?

Финал

296. Из клетчатой доски $m \times n$ удалены все $(m-2)(n-2)$ внутренних клеток ($m, n \geq 3$). На полученной каемке двое играют в следующую игру. За один ход можно выпилить несколько клеток, образующих прямоугольник (возможно, состоящий из одной клетки), если при этом оставшаяся часть не распадается на два куска. Выигрывает тот, кто сделает последний ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его соперник?

297. В треугольнике ABC одна из трисектрис угла B пересекается с одной из трисектрис угла C в ортоцентре этого треугольника. Докажите, что другие трисектрисы этих углов пересекаются в центре описанной окружности.

298. Из A в B с небольшими интервалами выехали семь велосипедистов. У одного из них была фляжка с водой. Время от времени кто-нибудь из них обгоняет другого, и, если у одного из них есть фляжка, тот обязательно передает ее другому. Какое наименьшее число обгонов (как с передачей фляжки, так и без) могло произойти, если известно, что фляжка по дороге побывала у всех и другим способом она не передавалась?

299. Есть 28 заготовок для детского домино. У каждой заготовки одна из половинок раскрашена в какой-нибудь цвет, причем всего использовано не более 7 цветов. Докажите, что можно раскрасить оставшиеся половинки так, чтобы домино можно было разложить на 7 кучек по 4 одинаково раскрашенных домино в каждой.

300. Можно ли из 1996 дробей $\frac{1}{1996}, \frac{2}{1995}, \frac{3}{1994}, \dots, \frac{1995}{2}, \frac{1996}{1}$ выбрать три, произведение которых равно единице?

301. Можно ли числа $1, 2, 3, \dots, 20$ так расставить в вершинах и серединах ребер куба, чтобы каждое число, стоящее в середине ребра, равнялось полусумме чисел на концах этого ребра?

302. На каждой клетке шахматной доски сидело по два таракана. В некоторый момент каждый таракан переполз на соседнюю (по горизонтали или вертикали) клетку, причем тараканы, сидевшие на одной клетке, оказались на разных. Какое наибольшее число клеток могло освободиться?

303. Двадцать пять различных натуральных чисел расставлены в таблице 5×5 так, что все суммы чисел по строкам одинаковы. Могут ли при этом быть одинаковы все произведения чисел по столбцам?

1997 год

20 — 26 августа. Лечебно-оздоровительный комплекс «Приморский хуторок» (Ярославская обл.). Проводящая организация — Управление по делам образования и молодежи администрации г. Рыбинска.

Призеры олимпиады

Диплом 1 степени — *Гайфуллин А. (Жуковский), Карвонен М. (Рыбинск), Подаксенов В. (Омск), Поярков А. (Рыбинск).*
Диплом 2 степени — *Берштейн М. (Харьков), Боровиков К. (Ярославль), Бурцев А. (Омск), Волюнин Д. (Рыбинск), Мойкина Т. (Ярославль), Соколов С. (Рыбинск), Шмаков С. (Омск).*
Диплом 3 степени — *Бакшин А. (Иваново), Жежерун А. (Самара), Касьянов Д. (Долгопрудный), Ляшенко Е. (Омск), Моисеев И. (Иваново), Овчинников А. (Самара), Полякова Л. (Харьков), Сербин Д. (Омск), Скрицкий Г. (Самара), Ульянов Ф. (Иваново).*

Призеры командного турнира

1 — 2. Омск, Рыбинск. 3 — 4. Иваново, Харьков.

Задачи олимпиады

304. На доске в ряд выписаны сто семерок. Можно ли между некоторыми из них поставить плюсы и минусы так, чтобы полученное выражение равнялось 1997?

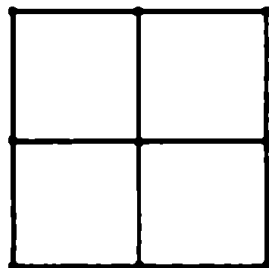
305. Можно ли все натуральные числа от 1 до 9 записать в клетки таблицы 3×3 так, чтобы сумма чисел в любых двух соседних (по вертикали или горизонтали) клетках равнялась простому числу?

306. Докажите, что любой выпуклый четырехугольник можно разрезать на четыре четырехугольника, каждый из которых является параллелограммом или трапецией.

307. На первой встрече делегаций Земли и Марса выясни-

лось, что ноги у марсианина в точности такие же, как и у человека, а вот количества рук и пальцев на руках другие. Хотя марсиан было на шестеро больше, чем землян, общее число пальцев (на руках и на ногах) у марсиан оказалось на один меньше. Сколько всего участников было на встрече?

308. Нарисуйте замкнутую ломаную без самопересечений с наименьшим возможным числом звеньев, пересекающую каждый из двенадцати отрезков (рис.20) и не проходящую через их концы.



309. Три гонщика ездят по круговому велотреку в одном направлении с разными постоянными скоростями. Известно, что для любых двух гонщиков на велотреке имеется ровно k точек, в которых один обгоняет другого. Докажите, что число k нечетно.

Рис. 20

310. Имеется n кошельков, по двадцать монет в каждом. Все монеты по виду одинаковы, однако в одном кошельке все монеты весят на 1 г легче настоящих, в другом кошельке все монеты весят на 1г тяжелее настоящих, а в остальных кошельках все монеты настоящие. Масса настоящей монеты известна. При каких значениях n за одно взвешивание на точных пружинных весах со стрелкой можно наверняка определить, в каких кошельках какие монеты?

Задачи математических боев

Вариант 1

311. Даны четыре различных натуральных числа. Может ли каждое из них делиться на разность любых двух из трех остальных?

312. Сколько корней имеет уравнение $19[x] + 97\{x\} = 1997$? (Здесь $[x]$ – целая, а $\{x\}$ – дробная часть числа x .)

313. Дан квадрат со стороной 4 м. Полуокружность радиусом 1 м находится вне квадрата и перемещается по плоскости так, что ее концы все время остаются на контуре квадрата. Найдите площадь фигуры, заматаемой этой полуокружностью.

314. Точку, расположенную внутри выпуклого четырехугольника, соединили со всеми его вершинами, при этом четырехугольник разбился на четыре равных треугольника. Верно ли, что этот четырехугольник является ромбом?

315. N карточек, пронумерованных числами от 1 до N , разложили в две стопки. При каком наименьшем значении N

обязательно найдутся две карточки, лежащие в одной стопке, сумма номеров которых — точный квадрат?

316. Малыш и Карлсон купили пирожные и мороженое. Малыш заплатил за 7 пирожных и 9 порций мороженого больше 20 крон, а Карлсон за x пирожных и 16 порций мороженого меньше 42 крон. При каких значениях x можно наверняка утверждать, что порция мороженого дороже пирожного, если пирожное стоит не менее 0,01 кроны?

317. Шесть трехклеточных уголков расположены на доске 8×8 (каждый уголок занимает ровно три клеточки). Докажите, что какой-то из них можно сдвинуть в пределах доски, не сместив при этом остальные уголки.

318. Когда чертежный карандаш укорачивается до двух сантиметров (так называемый «огрызок»), он становится непригодным для работы и выбрасывается. Чертежник приобрел в магазине четыре десятка самых длинных карандашей, шесть одинаковых коробок средних (которые были на три сантиметра короче длинных) и девять одинаковых коробок коротких (вдвое короче длинных). Впоследствии выяснилось, что длинных карандашей хватило на такой же объем работы, как и средних, и на такой же объем работы, как и коротких. Какова общая длина получившихся огрызков, если начальная длина каждого карандаша не менее пяти сантиметров?

Вариант 2

319. Докажите, что если a, b, c — различные целые числа, то значение выражения

$$\frac{a(c+a)(a+b)}{(c-a)(a-b)} + \frac{b(a+b)(b+c)}{(a-b)(b-c)} + \frac{c(b+c)(c+a)}{(b-c)(c-a)}$$

является целым числом.

320. Схема расположения городов и дорог в некотором государстве представлена на рисунке 21. Можно ли обойти все города, побывав в каждом из них ровно по одному разу?

321. Назовем дистанцией между двумя многоугольниками сумму их площадей, уменьшенную на удвоенную площадь их пересечения. Докажите, что для трех произвольных многоугольников дистанция между любыми двумя из них не превосходит суммы дистанций от них до третьего многоугольника.

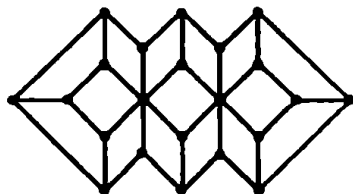


Рис. 21

322. Вася написал четыре утверждения: $n^3:3$, $n^3:9$, $n^3:27$, $n^3:81$. Известно, что среди них есть хотя бы одно истинное и хотя бы одно ложное. Можно ли по этим условиям однозначно определить, сколько истинных утверждений написал Вася, если дополнительно известно, что n — натуральное число?

323. Через точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника провели прямые, соответственно параллельные биссектрисам противолежащих углов. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

12	9	6	11
4	1	2	3
8	5	10	7

Рис. 22

324. В таблице разрешается переставлять местами любые две строки и любые два столбца. Можно ли из левой таблицы (рис.22) в результате нескольких таких преобразований получить правую таблицу?

325. Рассмотрим все правильные, в том числе сократимые, дроби со знаменателями, не превосходящими 1997. Можно ли разбить их на две группы так, чтобы были равны как количества чисел в обеих группах, так и их суммы?

326. Льюис Кэрролл как-то отправил своей племяннице следующий отчет:

	Фунты	Шиллинги	Пенсы
За одну похищенную перчатку		2	0
За боль от потери		3	8,5
За доставленное беспокойство		4	4,5
За причиненные неприятности		14	7
За время, потраченное на поиски вора		1	6
ИТОГО	1	6	2

Можно ли по этим данным определить, сколько в фунте шиллингов, а в шиллинге пенсов, если в фунте больше шиллингов, чем в шиллинге пенсов?

Вариант 3

327. Клетки доски 1×1997 , первоначально пустой, занумерованы слева направо числами от 1 до 1997. У двух игроков имеется мешок с достаточно большим количеством фишек. За один ход игрок может либо взять фишку из мешка и поставить ее на любое пустое поле, либо передвинуть какую-нибудь из уже стоящих фишек вправо на ближайшее пустое поле (если таковое найдется). Ходят игроки по очереди, и проигрывает тот из них,

кто не сможет сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его соперник?

328. Докажите, что число $1994 \times 1995 \times 1996 \times 1998 \times 1999 \times 2000 + 36$ является точным квадратом.

329. Разрежьте ромб двумя прямыми на четыре четырехугольника, в каждый из которых можно вписать окружность и около каждого из которых можно описать окружность.

330. Среди 16 различных чисел, расставленных по кругу, отметим те, которые равны сумме двух своих соседей. Какое наибольшее количество чисел может быть отмечено?

331. В передаче «Любовь с первого взгляда» участвовало восемь юношей и восемь девушек. Каждый юноша поссорился с четырнадцатью участниками передачи, а каждая девушка — с семью участниками передачи (ссоры взаимные). Докажите, что из участников передачи можно составить восемь пар, каждая из которых состоит из не поссорившихся между собой юноши и девушки.

332. Концы пяти параллельных хорд делят окружность на десять дуг. Известно, что для любой из этих дуг соседние с ней дуги равны между собой. Докажите, что сумма длин средней и двух крайних хорд равна сумме двух других.

333. Можно ли сто гирь массами 1 г, 2 г, 3 г, ... 100 г разложить на десять кучек так, чтобы любые две кучки имели различные массы, причем в любой более легкой кучке было больше гирь, чем в любой более тяжелой?

334. Сколько чисел, кратных 13, имеется среди первых ста членов последовательности 1, 11, 111, ...?

Полуфиналы

335. На столе лежат 13 карточек, занумерованных числами от 1 до 13. Петя и Вася по очереди берут по одной карточке. Начинает Петя, он стремится к тому, чтобы сумма номеров взятых им карточек оказалась в итоге простым числом. Может ли Вася ему помешать?

336. Внутри квадрата со стороной 10 имеется закрашенный квадратик со стороной 1, стороны которого параллельны сторонам большого квадрата. За одну пробу про любой многоугольник можно узнать, какая доля его площади закрашена. Можно ли за две пробы наверняка определить местоположение закрашенного квадратика?

337. Чему равно наибольшее значение выражения, полученного путем расстановки скобок в выражении $1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + \dots + 1 \times 1$ (всего 1997 единиц)?

346. Десять монет, среди которых есть как настоящие, весящие по 10 г, так и фальшивые, весящие по 9 г, выложены в ряд. Известно, что каждая настоящая монета лежит левее любой фальшивой монеты. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить все настоящие монеты?

347. Придумайте три треугольника, из которых можно составить (без наложений) и треугольник, и выпуклый четырехугольник, и выпуклый пятиугольник (при составлении каждой из этих фигур необходимо использовать все три треугольника, треугольники разрешается переворачивать).

348. На каждом из двух одинаковых кубов отмечено по пять вершин. Докажите, что можно совместить эти кубы так, чтобы совпало не менее четырех пар отмеченных вершин.

349. Для любых x , y и z докажите неравенство

$$x^2(z^2 - x^2)(x^2 - y^2) + y^2(x^2 - y^2)(y^2 - z^2) + z^2(y^2 - z^2)(z^2 - x^2) \leq 0.$$

350. Вначале в банку посадили одну амебу. Каждую секунду происходит одно из следующих двух превращений: либо несколько амеб (из имеющихся) делятся на шесть амеб каждая, либо ровно одна из амеб умирает. Через какое наименьшее время в банке может оказаться ровно 1997 амеб?

ЗАОЧНЫЙ КОНКУРС

1997/98 учебного года

1. Покажите, что если натуральное число n не делится на 3, то найдутся два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на n .

2. Можно ли разделить числа 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999 на две группы так, чтобы сумма квадратов чисел одной группы равнялась сумме квадратов чисел другой группы?

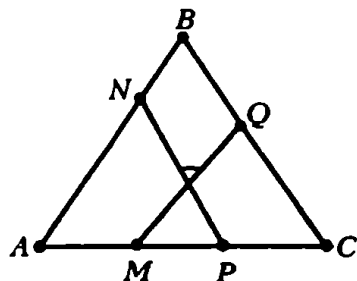


Рис. 25

3. В равностороннем треугольнике ABC со стороной a точки M , N , P и Q расположены так, как это показано на рисунке 25. Известно, что $MA + AN = PC + CQ = a$. Докажите, что угол между отрезками MQ и PN равен 60° .

4. 25 одноклассников ежегодно в день окончания школы звонят друг другу. В очередном году оказалось, что среди любых трех одноклассников хотя бы одна пара не смогла связаться по телефону. Какое наибольшее количество разговоров между одноклассниками могло произойти?

5. В одной большой клетке сидели 38 попугаев. Однажды они передрались, в результате каждый из них выдрал у кого-то другого перо из хвоста и у всех попугаев оказались поврежденными хвосты. При этом для любых трех попугаев можно указать четвертого, который травмировал одного из них. Хозяин решил пересадить их в три клетки, которые вмещают 16, 16 и 6 попугаев. Докажите, что он может рассадить попугаев так, чтобы ни один попугай не сидел в одной клетке со своим обидчиком.

6. В Анчурии в продаже появилось новое средство для похудения – магнитное кольцо, прикрепляемое к носу. Его стоимость – 5 долларов за штуку, но если кто-то покупает сразу пять колец, то шестое ему выдается бесплатно.

Сложившись, сотрудники одной фирмы приобрели себе такие кольца, что позволило им сэкономить некоторую сумму. Однако затем главный бухгалтер с досадой заметил, что если бы они купили не по одному кольцу, а по два, то каждое кольцо обошлось бы на 1 цент дешевле. А какова была бы экономия, если бы каждый купил по четыре кольца?

7. В выходной день каждый из учеников класса один раз побывал на катке. Известно, что каждый мальчик встретил там всех своих одноклассниц. Докажите, что в некоторый момент либо все мальчики класса присутствовали на катке, либо все девочки.

8. На всех клетках шахматной доски написаны некоторые числа. Разрешается менять местами числа в любых двух соседних (по стороне) клетках, а также заменять числа в любых двух соседних клетках их полусуммами. Докажите, что с помощью таких операций все числа в клетках можно сделать равными.

9. В треугольнике ABC через точку P проведены три отрезка, параллельные сторонам треугольника, как указано на рисунке 26. Докажите, что площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

10. В качестве вещественного доказательства при рассмотрении дела об изготовлении фальшивых монет суду были предъяв-

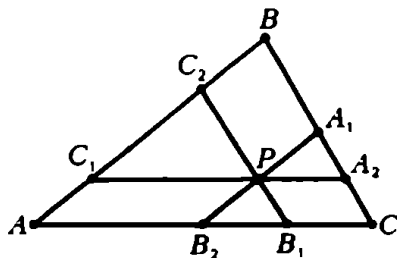


Рис. 26

ны 18 монет, изъятых у подсудимого. Суд знает, что настоящие монеты весят одинаково, а фальшивые – тоже одинаково, но они легче настоящих. Прокурор знает, что ровно 9 монет – фальшивые, причем ему известно, какие именно. Сможет ли он убедить в этом суд, сделав только три взвешивания на чашечных весах без гирь?

11. Книга имеет 120 страниц, одна из которых отведена под титул, одна – под аннотацию и еще одна – под оглавление. На остальных страницах напечатаны сказки, причем каждая сказка начинается с новой страницы. Сумма номеров страниц, на которых начинаются сказки, в пять раз меньше суммы номеров страниц, на которых они заканчиваются. Сколько сказок в книге?

12. Окружность и четырехугольник расположены так, как это показано на рисунке 27. Известно, что суммы длин противоположных дуг окружности, лежащих внутри четырехугольника, рав-

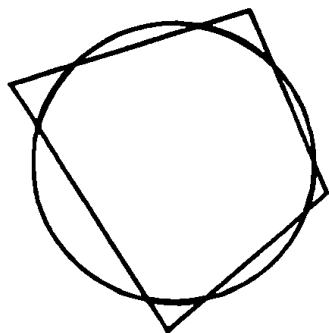


Рис. 27

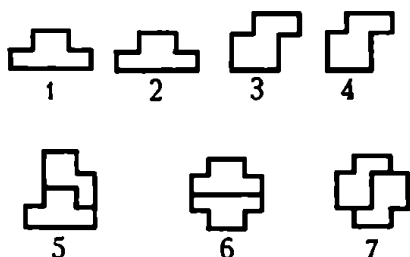


Рис. 28

ны. Докажите, что вокруг этого четырехугольника можно описать окружность.

13. Несложно придумать две пары одинаковых фигурок, обладающих следующим свойством: какие бы две из них ни выбрать, из них можно составить такую же фигуру, что и из двух оставшихся. Например, этим свойством обладают фигурки 1, 2, 3 и 4, изображенные на рисунке 28. (Из 1 и 2 складывается фигурка 6, равная фигурке 7, сложенной из 3 и 4, а из 1 и 3 (или 1 и 4) складывается фигурка 5, которую можно сложить из 2 и 4 (или 2 и 3)). Попробуйте найти четыре попарно различные фигурки, обладающие тем же свойством.

14. Найдите все тройки натуральных чисел a , b и c , удовлетворяющие уравнению

$$4(a + b + c) = ab + bc + ca.$$

15. В последовательности a_1, a_2, a_3, \dots число a_1 равняется 1799, а число a_2 равняется 1828. Каждое из следующих чисел находится по закону $a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{a_{n-1}}$. Чему равняется a_{1997} ?

16. Во время поездки к морю Петя собрал на берегу несколько красивых камней. Однажды он разложил их в 6 коробок так, чтобы количества камней в коробках были попарно взаимно простыми. Потом он взял по одному камню из двух коробок и отложил их в отдельную кучку, дальше он снова взял по одному камню из двух коробок и положил в ту же кучку. Когда он в девятый раз проделал эту процедуру, во всех коробках осталось поровну камней. Сколько у Пети было камней и как они были разложены по коробкам?

17. На окружности расположены 100 точек, являющихся вершинами правильного 100-угольника. Десять из этих точек окрасили в красный цвет, а еще десять – в синий. Докажите, что среди хорд, соединяющих точки красного цвета, найдется хорда, равная по длине одной из хорд, соединяющих точки синего цвета.

18. На доске 3×9 стоят три шашки так, как показано на рисунке 29. Двое начинают играть в следующую игру: каждый по очереди передвигает одну из шашек вправо по горизонтали. Проигрывает тот, кто не сможет сделать хода, т.е. при его ходе все шашки будут стоять у правого края. Докажите, что при правильной игре выигрывает начинающий.

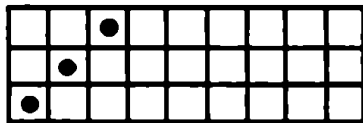


Рис. 29

19. Найдите какие-нибудь два десятизначных числа, наименьшее общее кратное которых равно квадрату их разности.

20. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Известно, что $AB = BC = CD$, а угол AOD равен полусумме углов BAD и CDA . Докажите, что $ABCD$ – ромб.

ДВА ПИСЬМА СЕРЕЖЕ

А. Бендукидзе

О системах счисления

(письмо первое)

Дорогой Сережа!

Помнишь нашу встречу в Батуми? В беседе со мной ты признался, что собираешься стать космонавтом. На мое замечание, что для достижения этой цели тебе нужно будет усердно заниматься, основательно выучить биологию, химию, физику, математику, ты ответил очень оригинально – начал демонстрировать свои познания. Оказалось, что математику ты знаешь отлично, даже любишь ее. И тогда я решил задать тебе «каверзный» вопрос: «почему верно равенство $7 + 8 = 15$ и может ли быть верным равенство $7 + 8 = 16$?»

Ты был немало удивлен, даже как-то растерян, но вскоре нашелся и ответил: «потому, что $7 + 8 = 15$, а равенство $7 + 8 = 16$ – неверное!» Было заметно, что ты сам не удовлетворен своим ответом. Я собирался объяснить, в чем тут дело, но, к сожалению, у нас не было возможности продолжить беседу, и я обещал тебе написать на эту тему письмо в «Квант», который ты, так же как и я, очень любишь. Выполняю свое обещание. Итак, первый вопрос.

Почему верно равенство $7 + 8 = 15$?

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно выяснить, что подразумевается под записью «15». Такая запись, как ты отлично знаешь, означает, что в этом числе 1 десяток и 5 единиц. Иными словами, 15 – это сумма $1 \times 10 + 5 \times 1$. Аналогично 287 , например, есть сумма $2 \times 100 + 8 \times 10 + 7 \times 1$. Последней сумме можно придать более удобную, как бы более симметричную форму:

$$2 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 7 \times 10^0.$$

Ты, конечно, знаешь, что первая степень любого числа равна самому числу, поэтому вместо 10 мы можем написать 10^1 . Что же касается последнего слагаемого, то скажу тебе, что любое отличное от нуля число в нулевой степени принято считать равным единице. В частности, $10^0 = 1$, и единицу мы можем заменить на 10^0 . В данном случае это очень удобно.

Итак, имеем:

$$15 = 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0,$$

$$287 = 2 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 7 \times 10^0.$$

Обрати, пожалуйста, внимание на расположение цифр данных чисел в правых частях этих равенств.

Вот еще два примера:

$$1975 = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 5 \times 10^0,$$

$$2904770 = 2 \times 10^6 + 9 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + \\ + 7 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 0 \times 10^0.$$

Попробуй записать в такой же форме числа 103 009, 222 669, 23 456 786.

Возможность представления чисел в виде таких сумм позволяет записывать числа, даже очень большие, всего десятью цифрами: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. При такой записи особую роль играет число *десять*. Поэтому эта система записи чисел называется *десятичной*, а число десять — *основанием* этой системы. Второй важный момент такой записи — то, что значение каждой цифры определяется не только ею самой, но и местом (*позицией*), которое она занимает в записи данного числа. Например, цифра 2 в записи числа 325 «стоит» в десять раз дороже, чем такая же цифра в записи числа 872, так как означает десятки, а не единицы. Ввиду этого такую систему записи называют еще и *позиционной*.

Итак, при записи чисел мы пользуемся десятичной позиционной системой счисления. Именно поэтому и верно равенство $7 + 8 = 15$.

Перейдем к следующему вопросу.

Может ли быть верным равенство $7 + 8 = 16?$

Ты, Сережа, конечно же хорошо понимаешь, что в десятичной системе это равенство быть верным не может. Но десятичная система не единственно возможная! Вовсе не обязательно, чтобы

основание системы равнялось десяти – за основание можно взять любое натуральное число (даже единицу). Рассмотрим, к примеру, *семеричную* систему счисления.

В семеричной системе за основание принято число *семь*, и для записи чисел в этой системе достаточно всего семи цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Само число *семь*, основание системы, запишется как 10 (это характерно для любой системы – основание системы в ней записывается как 10). Число *восемь* в семеричной системе записывается как 11, потому что $8 = 1 \times 7^1 + 1 \times 7^0$, девять – как 12, десять – как 13, а число *четырнадцать* запишется как 20. Число *сорок девять* в этой системе имеет вид 100 ($100 = 1 \times 7^2 + 0 \times 7^1 + 0 \times 7^0$).

Все это может показаться странным и трудным, но на самом деле здесь все естественно и даже легко, главное – хорошо понять эту своеобразную арифметику и привыкнуть к ней. Обычно, когда рассматривают числа в разных системах счисления, у каждого числа ставят индекс – основание системы счисления, в которой это число записано. Тогда рассмотренные нами примеры можно записать так:

$$7_{10} = 10_7, 8_{10} = 11_7, 9_{10} = 12_7, 10_{10} = 13_7, 14_{10} = 20_7, 49_{10} = 100_7.$$

Читаются эти равенства следующим образом: «семь десятичное равно десяти семеричному» и т.д.

Предлагают тебе в качестве упражнения доказать истинность следующих равенств: $2_7 + 6_7 = 11_7$, $4_7 + 5_7 = 12_7$, $11_7 + 16_7 = 30_7$, $3_7^2 = 12_7$, $4_7 \times 6_7 = 33_7$, $101_7 : 34_7 = 2_7$.

Попробуй также составить таблицы сложения и умножения однозначных чисел в семеричной системе счисления.

А теперь попытаемся выяснить, в какой же системе может быть верным равенство

$$7 + 8 = 16.$$

Думаю, ты сам уже сообразил, что основанием этой системы должно быть такое число a , которое, сложенное с шестью единицами, в сумме дает пятнадцать. В самом деле, ведь 16_a означает сумму $1 \times a^1 + 6 \times a^0$, т.е. $16_a = a_{10} + 6_{10}$. С другой стороны, $7_a + 8_a = 7_{10} + 8_{10} = 15_{10}$, и поэтому должно быть $a_{10} + 6_{10} = 15_{10}$. Отсюда уже нетрудно найти a – оно равно *девяти*.

Итак, равенство $7 + 8 = 16$ верно в девятеричной системе счисления, $7_9 + 8_9 = 16_9$. Это и есть ответ на вопрос, поставленный в заголовке.

На этом, дорогой Сережа, разреши поставить точку. Правда, я собирался рассказать тебе еще о двоичной системе счисления, примечательной во многих отношениях, но думаю, будет лучше, если мы о ней поговорим в следующий раз, а пока я советую тебе посмотреть книгу С.В.Фомина «Системы счисления» (серия «Популярные лекции по математике», М., «Наука», 1975).

Желаю успеха! До новых встреч на страницах «Кванта».

P.S. Если тебе что-нибудь покажется неясным, напиши, я с удовольствием отвечу.

О двоичной системе счисления

(письмо второе)

Здравствуй, дорогой Сережа!

На днях получил твоё письмо. Оно меня очень обрадовало. Ты пишешь, что внимательно прочёл заметку «О системах счисления» в «Кванте» №8 за 1975 год и решил все предложенные там задачи. Разве можно усомниться в этом, когда в конце письма значится: «Писано в Москве, в воскресенье, 112-го сентября 30400 года»?¹. Ох, и оригинальный же ты человек, Сережа! Правда, мне не совсем понятно, почему число и год ты записал в разных системах. Впрочем, в данном случае – это твоё право.

Ну, а теперь приступим к делу.

1. Как я и обещал, сегодня у нас речь пойдет о двоичной системе счисления. Это – самая простая система счисления. В ней только две цифры – 0 и 1. Число 2, т.е. *основание системы*, запишется как 10. Ты, конечно это отлично знаешь.

Вот как запишутся в двоичной системе числа первого десятка: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010.

Таблица сложения в этой системе состоит из единственного равенства: $1 + 1 = 10$. (Равенства $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ можно опустить – ведь прибавление нуля не меняет числа!)

А как с таблицей умножения? Собственно говоря, никакой таблицы умножения в двоичной системе и нет – нужно только знать, что любое число, умноженное на ноль, есть ноль, и что умножение на единицу числа не меняет.

Арифметические действия над многозначными числами в

¹ 14 сентября 1975 года. Число 14, записанное в десятичной системе, т.е. 14_{10} – это число 112 в *троичной* системе счисления; поскольку $14_{10} = 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^0$. А число 1975_{10} в *пятеричной* системе счисления запишется как 30400, так как $1975_{10} = 3 \cdot 5^4 + 0 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0$.

двоичной системе выполняются по тем же правилам, что и в десятичной. Рассмотрим конкретные примеры.

1) Сложим числа 101101 и 10100. Запишем одно число под другим, соблюдая разряды:

$$\begin{array}{r} 101101 \\ + 10100 \\ \hline \end{array}$$

$1 + 0 = 1$; $0 + 0 = 0$; $1 + 1 = 10$, – 0 пишем, 1 в уме; далe $1+0 = 1$, да еще 1, будет 10, – опять 0 пишем, 1 – в уме; наконец 1, да еще 1 (то, что было «в уме») дают 10. Итак, получим:

$$\begin{array}{r} 101101 \\ + 10100 \\ \hline 1000001 \end{array}$$

Проверим правильность наших вычислений. Для этого данные числа запишем в десятичной системе. Имеем:

$$101101_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 45_{10},$$

$$10100_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 20_{10}.$$

Сумма этих чисел должна равняться 65. Так и есть:

$$1000001_2 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 65_{10}$$

2) Умножим теперь число 1101 на число 110. Имеем:

$$\begin{array}{r} 1101 \\ \times 110 \\ \hline 11010 \\ 1101 \\ \hline 1001110 \end{array}$$

Проверку этого, а также следующих результатов:

$$\begin{array}{r} 111010111 \\ - 1100001 \\ \hline 101110110 \end{array} \quad \begin{array}{r} 111100 \\ - 1010 \\ \hline 1010 \\ - 1010 \\ \hline 1010 \\ - 1010 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1010 \\ 110 \end{array}$$

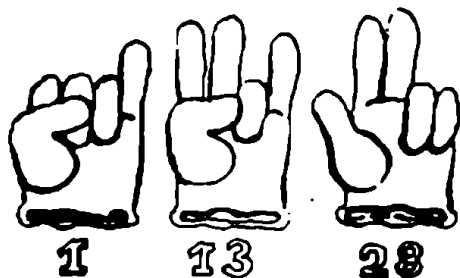
сделай сам.

Кроме того, выполни действия и проверь правильность полученных ответов в следующих примерах: $10101 + 101$, $111110 + 1011$, $101101 - 111$, $10101 \cdot 101$, $11011 : 11$, $1001110001 : 1111101$.

2. Как видишь, двоичная система и в самом деле очень простая. Правда, по сравнению с десятичной она довольно громоздка, но, оказывается, у нее есть ряд преимуществ. Расскажу только об одном.

Предположим, что для обозначения чисел мы используем... пальцы рук. Так поступают, например, судьи баскетбольных матчей, показывая «на пальцах» номер игрока, получившего персональное замечание. Если номер игрока не больше десяти, то судья просто показывает соответствующее число пальцев; если же номер больше десяти, то судья показывает пальцы одной руки, зажатые в кулак – это десяток, и добавляет нужное число пальцев другой руки – единицы. Так он может показать номера 11, 12, 13, 14, 15. А как быть, если игроков больше (т.е. если матч не баскетбольный, а, например, футбольный)?

Представим теперь на минутку, что судья пользуется не десятичной, а двоичной системой счисления. Как ты думаешь, какие числа сможет он показывать пальцами только одной руки? Наверное, ты не поверишь, если я скажу, что он сможет показать любое число от единицы до тридцати одного включительно? Тем не менее это так. В самом деле, условимся согнутым пальцем обозначать нуль, а выпрямленным – единицу. Тогда мы сможем показывать все числа от 00001_2 до 11111_2 ; а последнее и есть 31_{10} .



На рисунке показано несколько чисел, «записанных пальцами».

Подумай, сколько чисел можно «записать пальцами».

Подумай, сколько чисел можно «записать», если использовать пальцы обеих рук?

3. В заключение, дорогой Сережа, хочу рассказать тебе об одном фокусе: его с успехом демонстрируют на своих Праздниках математики учащиеся Батумской школы №7.

Возьмем какие-либо 15 названий – пусть, к примеру, это будут названия геометрических фигур: *точка, прямая, луч, отрезок* и т.д. – см. таблицу 1.

Составим из названий, помещенных в таблице 1, еще четыре таблицы (таблицы 2–5).

Таблица 1

1. Точка	8. Четырехугольник
2. Прямая	9. Параллелограмм
3. Луч	10. Прямоугольник
4. Отрезок	11. Ромб
5. Ломаная	12. Квадрат
6. Угол	13. Трапеция
7. Треугольник	14. Окружность
	15. Круг

Таблица 2

Точка
Луч
Ломаная
Треугольник
Параллелограмм
Ромб
Трапеция
Круг

Таблица 3

Прямая
Луч
Угол
Треугольник
Прямоугольник
Ромб
Окружность
Круг

Таблица 4

Отрезок
Ломаная
Угол
Треугольник
Квадрат
Трапеция
Окружность
Круг

Таблица 5

Четырехугольник
Параллелограмм
Прямоугольник
Ромб
Квадрат
Трапеция
Окружность
Круг

«Фокусник», показывая зрителям сводную таблицу, просит задумать название какой-либо фигуры. Потом, стоя спиной к таблицам 2 – 5, просит одного из зрителей сказать, в каких из этих таблиц присутствует задуманное им название. Получив ответ, он сразу называет, какая фигура была задумана. Затем он обращается к следующему зрителю и опять безошибочно называет задуманную фигуру и т.д. Зрители поражены.

А стоит ли поражаться? Секрет фокуса заключается в том, чтобы уметь переводить числа из двоичной системы счисления в десятичную. Уверен, что ты уже раскрыл его. Если нет, подумай – и наверняка найдешь ключ к отгадке. (Между прочим, можно брать и больше названий, например 31, или 63, или 127 и т.д. Но тогда придется составлять не четыре, а соответственно пять, шесть или семь таблиц.)

Ну, вот и все. Надеюсь, у тебя появилось желание поглубже познакомиться с системами счисления, в том числе и с двоичной. Могу порекомендовать литературу. Это книга С.В.Фомина «Системы счисления и арифметические основы работы электронных вычислительных машин», М., 1975.

С нетерпением жду твоего письма. Желаю успеха!

ТАЙНЫ СОВЕРШЕННЫХ ЧИСЕЛ И ДРУЖЕСТВЕННЫХ ПАР

А. Варпаховский

Пожалуй, ни одни числа не имеют такой захватывающей истории, как числа совершенные и их ближайшие родственники – дружественные числа.¹

Первый важный шаг в построении теории совершенных чисел был сделан еще Евклидом, который установил, что формула $2^{n-1}(2^n - 1)$ дает совершенное число всякий раз, когда множитель в скобках оказывается простым (для этого необходимо, чтобы n было простым, хотя далеко не для всякого простого числа n число $2^n - 1$ также является простым).

Вот доказательство теоремы Евклида. Пусть у числа $2^{n-1}(2^n - 1)$ множитель в скобках простой. Тогда делителями этого числа, отличными от самого числа, будут

$$1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}, (2^n - 1), 2(2^n - 1), 4(2^n - 1), \dots, 2^{n-2}(2^n - 1).$$

Возьмем сумму всех этих делителей:

$$\begin{aligned} (1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1}) + (1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-2})(2^n - 1) = \\ = (2^n - 1) + (2^{n-1} - 1)(2^n - 1) = 2^{n-1}(2^n - 1). \end{aligned}$$

Следовательно, число $2^{n-1}(2^n - 1)$ – совершенное.

Спустя 2000 лет Леонард Эйлер доказал, что формула Евклида определяет все четные совершенные числа. Любопытно, что до сих пор никому не удалось найти нечетное совершенное число, и, возможно, такого вообще не существует. Поэтому в дальнейшем, говоря о совершенных числах, мы будем подразумевать четные совершенные числа. Удивительная формула Евклида тесно связана с обычной геометрической прогрессией со знаменателем 2 (1, 2, 4, 8, 16, ...). Вспомним древнюю историю

¹ Совершенными называют числа, равные сумме своих делителей; дружественные числа составляют пары, в которых сумма делителей одного числа равна второму числу и наоборот.

о персидском царе и авторе шахматной игры. Восхищенный этой игрой, царь предложил автору самому выбрать себе награду. Тот, на первый взгляд, изъявил очень скромное желание, попросив положить на первую клетку шахматной доски одно зернышко пшеницы, на вторую – два зернышка, на третью – четыре и таким способом заполнить все 64 клетки. Оказалось, что число зерен в последней клетке равно 9 223 372 036 854 775 808, а удвоенное это число без 1 равно суммарному числу зерен на доске, что в несколько тысяч раз превышает годовой урожай пшеницы во всем мире. Написав в каждой клетке шахматной доски число зерен, которое должно быть в ней, и забрав из каждой клетки по

Таблица 1

2 ⁰	2 ¹			2 ⁴		2 ⁶	
2 ⁸	2 ⁹	2 ¹⁰	2 ¹¹	2 ¹²		2 ¹⁴	2 ¹⁵
2 ¹⁶		2 ¹⁸		2 ²⁰	2 ²¹	2 ²²	2 ²³
2 ²⁴	2 ²⁵	2 ²⁶	2 ²⁷	2 ²⁸	2 ²⁹	2 ³⁰	
2 ³²	2 ³³	2 ³⁴	2 ³⁵	2 ³⁶	2 ³⁷	2 ³⁸	2 ³⁹
2 ⁴⁰	2 ⁴¹	2 ⁴²	2 ⁴³	2 ⁴⁴	2 ⁴⁵	2 ⁴⁶	2 ⁴⁷
2 ⁴⁸	2 ⁴⁹	2 ⁵⁰	2 ⁵¹	2 ⁵²	2 ⁵³	2 ⁵⁴	2 ⁵⁵
2 ⁵⁶	2 ⁵⁷	2 ⁵⁸	2 ⁵⁹	2 ⁶⁰		2 ⁶²	2 ⁶³

одному зернышку, увидим, что оставшееся в клетке число зерен в формуле Евклида определяется выражением $2^n - 1$. Если это число простое, то, умножив его на число зерен в предыдущей клетке, т.е. на 2^{n-1} , получим совершенное число (см. табл. 1).

Простые числа ряда $2^n - 1$ называют числами Мерсенна по имени французского математика XVII века, занимавшегося их изучением. На рисунке 1 закрашены те клетки,

в которых после вычитания 1 получаются числа Мерсенна. Таких клеток на доске 9 – им соответствуют первые девять совершенных чисел.

Совершенные числа обладают рядом таинственных и вместе с тем замечательных свойств. Например, все совершенные числа «треугольные». Это означает, что если взять, допустим, шарики в количестве, равном совершенному числу, то их можно расположить так, что они образуют равносторонний треугольник.

Иначе говоря, каждое совершенное число есть сумма вида

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n.$$

Также легко можно заметить, что каждое совершенное число, за исключением 6, есть частичная сумма ряда из кубов нечетных чисел $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots$.

А вот еще одно свойство совершенных чисел: сумма обратных значений делителей совершенного числа, включая и само число как делитель, всегда равна 2. Так, для числа 28 имеем

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = 2.$$

До сегодняшнего дня остаются без ответа два важных вопроса: существует ли нечетное совершенное число и существует ли наибольшее четное совершенное число? До сих пор не найдено ни одного нечетного совершенного числа, но вместе с тем и не доказано, что такого числа не существует. Ответ на второй вопрос зависит от того, является ли ряд простых чисел Мерсенна бесконечным, так как каждое простое число этого ряда приводит к совершенному числу. Было замечено что при постановке первых четырех чисел Мерсенна (3, 7, 31, 127) вместо n в формулу $2^n - 1$ снова получаются числа Мерсенна. Более 70 лет математики надеялись, что такая закономерность должна привести к заключению о бесконечности ряда простых чисел Мерсенна. Однако в 1953 году вычислительная машина разрушила их надежду. Было обнаружено, что в случае $n = 2^{13} - 1 = 8191$ (простое число Мерсенна) число $2^{8191} - 1$ не простое. Так до сих пор и не известно, является ли ряд Мерсенна бесконечным или в нем имеется самое большое число.

Оре в книге «Теория чисел и ее история» цитирует забавное высказывание Питера Барлоу из его книги «Теория чисел», вышедшей в 1811 году. Барлоу, вычислив девятое совершенное число, заявил, что «это наибольшее число, которое когда-либо будет найдено, потому что совершенные числа не более чем любопытны и вряд ли кому-либо придет в голову пытаться найти большее совершенное число». Однако в 1876 году французский математик Эдвард Лукас, автор классической четырехтомной работы по занимательной математике, объявил об открытии двенадцатого совершенного числа $2^{126}(2^{127} - 1)$. Позднее у Лукаса появились сомнения в том, что $2^{127} - 1$ есть простое число Мерсенна, но впоследствии его простота подтвердилась. $2^{127} - 1$ — наибольшее число Мерсенна, найденное без помощи вычислительной машины. В таблице 2 приведены выражения по формуле Евклида для 23 известных совершенных чисел, выписаны первые восемь из них (дальнейшие числа содержат слишком много знаков) и указано число десятичных знаков для каждого из этих чисел. Последнее известное совершенное число, которое имеет 22 425 делителей, появилось на свет в 1963 году после того, как вычислительная машина Иллинойского университета обнаружила 23-е число Мерсенна. В честь этого события на почтовых отправлениях математического отделения университета ставили штамп с надписью: « $2^{11213} - 1$ — простое число».

Формула	Число	Количество знаков
1 $2^1(2^2 - 1)$	6	1
2 $2^2(2^3 - 1)$	28	2
3 $2^4(2^5 - 1)$	496	3
4 $2^6(2^7 - 1)$	8 128	4
5 $2^{12}(2^{13} - 1)$	33 550 336	8
6 $2^{16}(2^{17} - 1)$	8 589 869 056	10
7 $2^{18}(2^{19} - 1)$	137 438 691 328	12
8 $2^{30}(2^{31} - 1)$	2 305 843 008 139 952 128	19
9 $2^{60}(2^{61} - 1)$		37
10 $2^{88}(2^{89} - 1)$		54
11 $2^{106}(2^{107} - 1)$		65
12 $2^{126}(2^{127} - 1)$		77
13 $2^{520}(2^{521} - 1)$		314
14 $2^{606}(2^{607} - 1)$		366
15 $2^{1278}(2^{1279} - 1)$		770
16 $2^{2202}(2^{2203} - 1)$		1 327
17 $2^{2280}(2^{2281} - 1)$		1 373
18 $2^{3216}(2^{3217} - 1)$		1 937
19 $2^{4252}(2^{4253} - 1)$		2 561
20 $2^{4422}(2^{4423} - 1)$		2 663
21 $2^{9688}(2^{9689} - 1)$		5 834
22 $2^{9940}(2^{9941} - 1)$		5 985
23 $2^{11212}(2^{11213} - 1)$		6 751

Обобщением совершенных чисел являются дружественные числа. Возьмем любое число и просуммируем его делители для получения второго числа. Затем просуммируем делители второго числа и так далее в надежде, что в конце концов мы придем к исходному числу. Если исходное число получается на первом шаге, то, значит, цепочка имеет лишь одно звено, а само число – совершенное. При двухзвенной цепочке два числа образуют дружественную пару: сумма делителей одного из чисел равна другому числу. Наименьшие дружественные числа, образующие пару, равны 220 и 284.

В 1636 году Пьер Ферма нашел другую дружественную пару чисел: 17 296 и 18 416. Он и Рене Декарт независимо

друг от друга дали правило образования дружественных пар, не подозревая, что это правило было сформулировано еще в IX веке одним арабским астрономом². Третью пару нашел Декарт: 9 363 584 и 9 437 056. В XVIII веке Эйлер опубликовал список 64 дружественных пар, однако, как показала позднейшая проверка, в двух случаях он ошибся. В 1830 году Адриен Мари Лежандр нашел еще одну дружественную пару, а в 1867 году шестнадцатилетний итальянский юноша Б.И. Паганини удивил математический мир, объявив, что числа 1184 и 1210 – дружественные. Это была вторая по величине пара, которую все проглядели. И хотя, возможно, Паганини нашел эту пару методом проб и ошибок, имя его навсегда вошло в историю теории чисел.

Сегодня известны более 600 дружественных пар; многие числа пар состоят более чем из 30 цифр. Последняя известная пара была вычислена на ЭВМ в 1964 году. В таблице 3 приведены дружественные пары в диапазоне чисел от 0 до 100 000.

Таблица 3

1	220	284	8	17 296	18 416
2	1 184	1 210	9	63 020	76 084
3	2 620	2 924	10	66 928	66 992
4	5 020	5 564	11	67 095	71 145
5	6 232	6 368	12	69 615	87 633
6	10 744	10 856	13	79 750	88 730
7	12 285	14 595			

Все известные дружественные пары состоят либо из двух четных чисел, либо (что гораздо реже) из двух нечетных. Но никто не доказал, что не существует дружественной смешанной пары. Брэтли и Мак-Кэй выдвинули гипотезу, что все нечетные дружественные числа кратны 3, а сумма чисел, образующих дружественную пару, кратна 9. Никто еще не предложил общей формулы для всех дружественных пар, и неизвестно, конечно или бесконечно число таких пар.

В настоящее время известны только две цепочки чисел, которые приводят к исходному числу и имеют больше чем два звена. В 1918 году французский математик П. Пуле нашел

² Жителем месопотамского города Харрана – Абу-л-Хасаном Сабитом ибн Корра ибн Марван ас-Саби ал-Харрани (ок. 830 – 901). (Прим. ред.)

цепочку из пяти звеньев (12 496, 14 288, 15 472, 14 536, 14 264) и поразительную цепочку из 28 звеньев (28 – совершенное число), которая начинается с числа 14 316. А вот трехзвенную цепочку до сих пор найти не удалось, несмотря на обширные поиски с помощью ЭВМ. И эти поиски будут продолжаться до тех пор, пока не встретится трехзвенная цепочка или пока какой-нибудь математик, специализирующийся в теории чисел, не докажет, что таких цепочек нет.

Ф.Бартенев

Свойства чисел, известные сегодня, по большей части были открыты путем наблюдений.

Леонард Эйлер

Как обычно исследуются законы природы?

Физики, химики, биологи ставят эксперименты. Затем исследуют получающиеся результаты измерений, подмечают закономерности, делают те или иные выводы.

Как ни удивительно, но и ученые-математики в своем научном творчестве зачастую пользуются наблюдениями, как и естествоиспытатели. Чтобы глубоко понимать даже «школьную» математику, решать разные замысловатые задачи, нужно научиться наблюдать в математике.

Вот один интересный факт из истории науки. Выдающимся математикам К.Гауссу и А.Колмогорову в детстве предложили аналогичные задачи: десятилетнему Гауссу – найти сумму $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$, а шестилетнему Колмогорову – сумму $1 + 3 + 5 + \dots + 95 + 97 + 99$. Гаусс решил свою задачу почти мгновенно, заметив, что $1 + 99 = 2 + 98 = 3 + 97 = \dots$. Колмогоров, посчитав суммы $1 + 3$, $1 + 3 + 5$, $1 + 3 + 5 + 7$, заметил, что $1 = 1^2$, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$, и также быстро нашел ответ.

А как решить такую задачу:

Найти две последние цифры числа 311^{28} ?

Не вычислять же в самом деле 28-ю степень числа 311? Конечно, нет! Достаточно заметить, что две последние цифры числа 311^1 – это 11, числа 311^2 – 21, 311^3 – 31, ...; так что у числа 311^{28} две последние цифры – это 81.

Рассмотрим еще одну похожую задачу:

Какими двумя цифрами оканчивается число 7^{51} ?

Найдем вначале две последние цифры у чисел 7^1 , 7^2 , 7^3 , 7^4 и 7^5 . Легко видеть, что у 7^1 всего одна цифра – 7; запишем это так: 07; у 7^2 – 49, у 7^3 – 43 (две последние цифры произведения

49 на 7), у 7^4 — 01, так что у 7^5 две последние цифры — снова 07. Мы видим, что две последние цифры степеней семерки чередуются, образуя так называемую *периодическую последовательность* с периодом 4:

07, 49, 43, 01, 07, 49, 43, 01, 07, 49, ...

Остается только найти остаток от деления числа 51 на 4 — он равен трем, и посмотреть, какими двумя цифрами оканчивается куб семерки: у чисел 7^{51} и 7^3 две последние цифры совпадают. Итак, вот ответ: две последние цифры числа 7^{51} — это 43.

Решим еще одну задачу, отличную от предыдущих.

Для каких чисел справедливо неравенство

$$|a| + |b| > |a + b| ?$$

Рассмотрим несколько примеров. Для этого заполним несколько строк следующей таблицы:

a	b	$ a + b $	$ a + b $
-3	2	5	1
-7	-1	8	8
0	-4	4	4
4	0	4	4
2	3	5	5
7	-1	8	6
...

Глядя на эту таблицу, уже нетрудно догадаться, каков должен быть ответ в последней задаче: сумма абсолютных величин двух чисел больше абсолютной величины суммы этих чисел только тогда, когда оба эти числа отличны от нуля и имеют разные знаки.

Конечно же, всякая «догадка», гипотеза, нуждается в строгом математическом доказательстве. Это мы оставляем нашим читателям.

Если вы разобрались в решении первых трех задач, попробуйте решить самостоятельно еще три задачи немного посложнее.

Задачи

1. Какими цифрами не могут оканчиваться суммы $1 + 2$, $1 + 2 + 3$, $1 + 2 + 3 + 4$, $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$?

2. По кругу расположены 60 положительных и отрицательных единиц (причем есть и те и другие). Известно, что произведение любых трех последовательных чисел равно -1 . Найдите сумму всех чисел.

3. Сколько потребуется разрезов, чтобы куб со стороной 3 см разрезать на кубики со стороной 1 см?

В заключение предостережем читателей от скоропалительных выводов из результатов наблюдений. Чтобы *доказать* какое-либо утверждение, нужно убедиться, что оно справедливо в каждом частном случае; в то же время, чтобы *опровергнуть* какое-либо утверждение, достаточно показать, что оно не справедливо хотя бы в одном частном случае (как говорят математики, привести *контрпример*). Поясним, что мы имеем в виду.

Рассмотрим множество чисел вида $m = n^2 + 3n + 1$, где n – любое натуральное число. Для значений $n = 1, 2, 3, 4$ и 5 получаем $m = 5, 11, 19, 29$ и 41 , т.е. первые пять значений m – простые числа. Можно ли сделать вывод, что любой элемент нашего множества будет простым числом (для любого натурального n)? Разумеется, нет: уже при $n = 6$ получаем составное значение $m = 55$.

Задачи

4. Пусть A – множество чисел вида $6n - 1$, а P – множество простых чисел. Верно или ложно высказывание: $A \subset P$, если $n \in \mathbb{N}$?

5. Верно ли, что при любом целом n справедливо неравенство $4n^2 + 40n + 99 > 0$?

Иногда найти контрпример, опровергающий общее утверждение, очень трудно. Бывает, что легче доказать *существование* соответствующего контрпримера, чем его *построить*.

Например, очевидно, что если 100 школьников получили 101 тетрадь, причем каждый школьник получил хотя бы одну тетрадь, то найдется школьник, получивший две тетради.

Прием рассуждений, с помощью которого мы сделали вывод в последнем примере, называется «*принципом Дирихле*» и часто применяется к решению задач. Решим с его помощью следующую задачу:

Доказать, что из 101 числа можно выбрать два, разность которых делится на 100.

В самом деле, при делении на 100 в остатке может получиться одно из следующих чисел: 0, 1, 2, ..., 99 – сто разных чисел. Поэтому среди 101 числа обязательно найдутся два, дающие при делении на 100 равные остатки. Следовательно, их разность делится на 100.

И, наконец, еще одна задача на принцип Дирихле.

Задача 6. В лесу растет 710 000 елочек. На каждой елочке не больше 100 000 иголок. Докажите, что в лесу есть по крайней мере 8 елочек с одинаковым числом иголок.

Ф.Бартенев, А.Савин

Рассказывают, что однажды племянник Шерлока Холмса Джек обратился к своему знаменитому дяде с просьбой помочь в решении следующей задачи: *Купили несколько одинаковых книг и одинаковых альбомов. За книги заплатили 10 р. 56 к. Сколько купили книг, если цена одной книги более чем на 1 рубль превосходит цену альбома, а книг купили на 6 больше, чем альбомов?*

Прочтя условия, знаменитый сыщик прошел от стола к окну, затем вернулся к столу, постоял около него, уставившись в потолок, и, наконец, сказал: «Книг было куплено 8 штук».

«Как вы это установили?» — в один голос воскликнули Джек и присутствовавший при этом доктор Ватсон.

«О, это было совсем просто! — ответил Шерлок Холмс, усаживаясь в кресло. — Посмотрев на слова «книг купили на 6 больше, чем альбомов», я тут же понял, что книг купили не меньше 7. Из того, что «цена одной книги более чем на 1 рубль превосходит цену альбома» я сделал вывод, что каждая книга стоит больше 1 рубля, а поскольку за них заплачено 19 р 56 к, книг купили не больше 10. Таким образом, все числа, большие 10, и все числа, меньшие 7, оказались вне подозрений. Проверив каждое из чисел 7, 8, 9, 10, я установил, что искомое число может быть только 8: остальные не делят 1056».

Метод перебора, которым воспользовался здесь Шерлок Холмс, видимо, является древнейшим из методов решения задач. Долгое время его относили к методам «второго сорта», «переборные» решения считались некрасивыми. Однако в последние годы метод перебора применяется все чаще и чаще в задачах, где искомая величина принимает только целочисленные значения.

Перебор ведет ЭВМ

Известно много серьезных задач, которые математики не могут решать иначе, чем методом перебора. Правда, при этом перебор производит электронная вычислительная машина, а

математик лишь инструктирует ее, как этот перебор нужно сделать. Известный американский математик С.Голомб пишет по этому поводу¹ : «В отличие от человека машина, решая задачи, производит однообразные вычисления, которые кажутся нам столь скучными, с невообразимой быстротой. Но вместе с тем она не заметит способа упростить или улучшить решение, если этот способ не будет заранее учтен программистом, составляющим детальные инструкции для работы ЭВМ».

Тем не менее в последние годы рост быстродействия и объема памяти компьютеров, их большая доступность и дешевизна позволяют все чаще использовать их для решения переборных задач. Так, знаменитая «задача о четырех красках» (*Всякую ли географическую карту можно раскрасить четырьмя красками так, чтобы страны одинакового цвета не имели общих участков границы?*) была решена – очень хитрым перебором – лишь при помощи ЭВМ. Недавно одна из наиболее известных задач о полимино из книги С.Голомба тоже была решена методом перебора с участием компьютера.

Турист укладывает рюкзак

К числу задач, решаемых методом перебора, относится так называемая «задача об укладке рюкзака»: *Уложить в рюкзак предметы из заданного набора так, чтобы их суммарная масса была наибольшей (и суммарный объем не превосходил объема рюкзака).*

В такой постановке задача выглядит игрушечной, но замените «рюкзак» на «отсек в трюме теплохода» — и вы поймете, что эта задача имеет существенное народнохозяйственное значение.

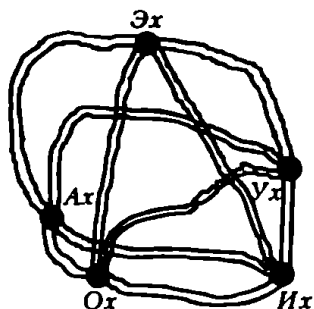
Упражнение 1. Решите задачу об укладке рюкзака объемом 100 дм³ и предметов, указанных в таблице.

Предмет	Вес	Объем
Палатка	20	60
Спальн. мешок	5	55
Одеяло	8	32
Радиоприемник	2	20
Кулек с едой	10	8
Мяч	0,5	10
Топор	3	2

¹ С.В.Голомб. «Полимино» (М., «Мир», 1975).

Коммивояжер отправляется в путь

Другой широко известной задачей, решаемой перебором вариантов, является «задача коммивояжера»²: Как объехать



несколько городов, между каждым двумя из которых имеется железнодорожное сообщение, затратив как можно меньше времени, если задан город, в котором начинается и кончается путь?

Уже для 5 городов количество вариантов равно 24, для 6 городов 120, для семи – 720, для десяти – 362880. Чтобы избежать полного перебора, математики придумали различные ухищрения.

Делается это не зря – решение подобной задачи необходимо для нахождения наилучшего маршрута для фургона, развозящего журналы и газеты по киоскам, автобуса, подбирающего сельских жителей на работу, и т.п.

Упражнение 2. На рисунке показана карта местности, на которой расположены 5 городов: Ax, Oх, Эх, Ух и Их, а в таблице указаны расстояния между ними по железной дороге. Найдите кратчайший путь коммивояжера, который должен выехать из города Ух, объехать остальные города и вернуться в Ух.

	Ax	Их	Oх	Ух	Эх
Ax	0	60	40	50	20
Их	60	0	30	35	45
Oх	40	30	0	55	50
Ух	50	35	55	0	20
Эх	20	45	50	20	0

Сократим перебор

Для решения подобных задач были созданы сложные методы, сокращающие перебор вариантов. Они составляют новую математическую науку, которая носит название «целочисленное программирование».

Некоторое представление о возможностях сокращения перебора может дать решение такой задачи: Известно, что $\sqrt[3]{*****3}$ есть натуральное число. Найдите его.

Первое, что приходит в голову, – это перебирать пятизначные числа, оканчивающиеся на 3, и смотреть, нет ли среди них точных кубов: 10003, 10013, 10023, ... Но когда еще мы

² Коммивояжер – путешествующий представитель торговой фирмы.

доберемся до 99993, да и как узнать, является данное число кубом или нет?

Лучше будем возводить число в куб и посмотрим, какие из них будут пятизначными и оканчивающимися на 3. Получим $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $9^3 = 729$, $10^3 = 1000$.

Так дело тоже не пойдет. Зачем нам нужны кубы маленьких чисел? Посмотрим, чему равно наименьшее число x , куб которого является пятизначным числом. Оно не меньше чем $\sqrt[3]{10000} = 10\sqrt[3]{10}$, но $\sqrt[3]{10}$ больше 2, так как $2^3 = 8$; поэтому x больше 20. Оценим искомое число сверху, т.е. посмотрим, какого числа оно не может превышать. Такое число, очевидно, равно $\sqrt[3]{100000} = 10\sqrt[3]{100}$. Но $\sqrt[3]{100}$ меньше 5, так как $5^3 = 125$. Значит, нужно перебирать числа от 21 до 49.

Посмотрим, не поможет ли нам сократить перебор то, что число под радикалом оканчивается на 3. Изучим выписанные нами кубы первых десяти натуральных чисел. Из них на 3 оканчивается лишь 7. Если теперь немножко подумать, то нетрудно сообразить, что куб натурального числа будет оканчиваться на 3 в том и только в том случае, если само число оканчивается на 7.

Теперь нам осталось для перебора лишь три числа: 27, 37 и 47. $27^3 = 19683$, $37^3 = 50653$, $47^3 = 103823$, но последнее число уже шестизначное, поэтому остаются лишь числа 27 и 37.

Упражнения

3. В составлении 40 задач (для школьников) приняло участие 30 студентов (пединститута) со всех пяти курсов. Любые два однокурсника придумали одинаковое число задач. Любые студенты разных курсов придумали разное число задач. Сколько студентов придумало по одной задаче?

4. Сколькими нулями может оканчиваться число $9^n + 1$?

5. В буфете продавались пирожки по 5 к., булочки по 6 к., булки по 7 к., слойки по 8 к. и коржики по 10 к. Ребята купили на рубль 14 изделий разных видов. Если взять по одному представителю каждого купленного вида, то их суммарная цена будет равна 21 к. Сколько и каких изделий было куплено, если известно, что никаких изделий не было куплено больше шести и никаких изделий не было куплено поровну?

6. Найдите два целых положительных числа, разность между квадратами которых равна 455.

7. Студент за 5 лет учебы сдал 31 экзамен. В каждом следующем году он сдавал экзаменов больше, чем в предыдущем. На пятом курсе экзаменов было втрое больше, чем на первом. Сколько экзаменов было на четвертом курсе?

ОТКУДА ПРОИЗОШЛИ НАЗВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР?

Б. Розенфельд

Почти все названия геометрических фигур греческого происхождения, как и само слово геометрия, происходящее от греческого слова γεωμετρία (геометрия) – землемерие. Однако эти слова вошли в русский язык не непосредственно с греческого, а через латинский.

Слово *цилиндр* происходит от латинского слова *cylindrus* (цилиндрус), являющегося латинской формой греческого слова κύλινδρος (кюлиндрос), означающего валик, каток.

Слово *призма* – латинская форма греческого слова πρίσμα (присма) – опиленная (имелось в виду опиленное бревно).

Слово *сфера* – латинская форма греческого слова σφαῖρα (сфайра) – мяч.

Слово *пирамида* – латинская форма греческого слова πυράμις (пюрамис), которым греки называли египетские пирамиды; это слово происходит от древнеегипетского слова «пурама», которым эти пирамиды называли сами египтяне. Современные египтяне называют пирамиды словом «ахрам», которое также происходит от этого древнеегипетского слова.

Слово *трапеция* происходит от латинского слова *trapezium* (трапезиум) – латинской формы греческого слова τράπεζιον (трапезион) – столик. От этого же корня происходит наше слово «трапеза», означающее по-гречески стол.

Слово *ромб* происходит от латинского слова *rombus* (ромбус) – латинской формы греческого слова ῥόμβος (ромбос), означающего бубен. Мы привыкли к тому, что бубен имеет круглую форму, но раньше бубны имели форму квадрата или ромба, о чем свидетельствуют изображения «бубен» на игральных картах.

Непосредственно с латинского языка мы заимствовали слово *пункт*, употребляющийся иногда в значении «точка» (отсюда «пунктир»), и слово *линия*.

Слово *пункт* происходит от латинского слова *punctum* (пун-

ктум) – укол; от этого же корня происходит медицинский термин «пункция» – прокол.

Слово *линия* происходит от латинского слова *linea* (линеа) – льняная (имеется в виду льняная нить). От этого же корня происходит наше слово «линолеум», первоначально означавшее промасленное льняное полотно.

Таким образом, все названия геометрических фигур первоначально были названием конкретных предметов, имеющих форму, более или менее близкую к форме данной фигуры.

ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

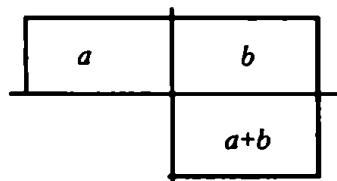
А. Бендукидзе

Возьмите лист бумаги и начертите на нем квадратную таблицу в 100 клеток (десять строк и столько же столбцов). При выборе размеров таблицы учтите, что в ее клетки вам придется вписывать числа, некоторые из которых будут трехзначными.

Ну как, готово?

Отлично! Начните заполнять таблицу.

В клетки первого столбца напишите число 1, а в клетки первой строки, кроме, конечно, самой левой, в которой уже стоит единица, — число 0. Остальные клетки таблицы заполняйте по очереди, двигаясь слева направо и сверху вниз, по *закону перехода*, показанному на рисунке 1. Так, во вторую клетку второй строки нужно написать 1 ($1 + 0 = 1$), а во вторую клетку третьей строки — 2 ($1 + 1 = 2$) и т.д. Для



контроля приведем четвертую и девятую строки — если вы не ошиблись, такие же строки получились и у вас:

1	3	3	1	0	0	0	0	0	0
1	8	28	56	70	56	28	8	1	0

Посмотрите теперь внимательно на полученную таблицу. Ее нулевые элементы образуют треугольник, две стороны которого (вертикальная и косая) состоят из единиц, а третья (горизонтальная) имеет вид

1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
---	---	----	----	-----	-----	----	----	---	---

(Разумеется, построение можно продолжить и дальше или оборвать, не доходя до десятой строчки.)

Полученный треугольник называется *треугольником Паскаля*, в честь великого французского ученого Блеза Паскаля (1623—1662), который придумал и исследовал его. Чем этот треугольник замечателен? А это мы сейчас и увидим.

Подсчитаем подмножества

Рассмотрим множество M_4 , состоящее из четырех разных мячей – теннисного, волейбольного, футбольного и баскетбольного (рис.2). Найдем все его подмножества (включая пустое \emptyset и все множество M_4), группируя их по числу элементов (рис.3), и

$$\{\text{теннисный мяч}, \text{волейбольный мяч}, \text{футбольный мяч}, \text{баскетбольный мяч}\} = M_4$$

Рис. 2

0 элементов 1 элемент 2 элемента 3 элемента 4 элемента

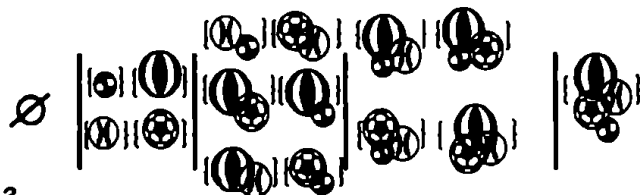


Рис. 3

выпишем в строчку, сколько подмножеств получилось в каждой группе:

1 4 6 4 1

Знакомая строчка? Да, получилась пятая строчка треугольника Паскаля. Это не случайно. Если бы мы взяли множество M_3 из трех элементов, мы получили бы таким образом 1 3 3 1 – четвертую строчку треугольника Паскаля. Вообще, если взять множество M_n из n элементов и составить строчку из числа его 0-элементных подмножеств, числа 1-элементных, числа 2-элементных, ..., числа $(n-1)$ -элементных и числа n -элементных подмножеств, получится $(n+1)$ -я строчка треугольника Паскаля.

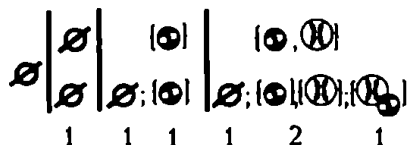


Рис. 4

Проверим это еще для $n = 0, 1, 2$. Действительно, все в порядке (рис.4).

Чтобы доказать это в общем случае, достаточно проверить, что каждая строчка получается из предыдущей по такому же закону перехода, как треугольник Паскаля. А это действительно так.

Например, посмотрим, как получается число 2-элементных подмножеств M_4 . Для этого на время спрячем в карман теннисный мяч – получим множество M_3 . В нем уже есть три 2-элементных подмножества (рис.5).



Рис.5



Рис. 6



Чтобы получить остальные, нужно вынуть из кармана теннисный мяч и добавить его к трем 1-элементам подмножеств M_3 (рис.6).

Получим $3 + 3 = 6$, как и полагается по закону перехода. Ясно, что это рассуждение общее, его можно провести для нахождения закона перехода к числу k -элементных подмножеств множества из n элементов для любых $k \leq n$.

Теперь, чтобы установить число подмножеств, скажем, из пяти элементов в множестве, скажем, из восьми элементов, нет необходимости производить сложные перечисления. Готовый ответ (70) написан на пятом месте девятой строки треугольника Паскаля.

Но треугольник Паскаля полезен не только для этого.

Раскроем скобки

Последовательно раскрывая скобки и приводя подобные члены, нетрудно найти, что

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + 1x,$$

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + 1x^3,$$

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + 1x^4.$$

Найти $(1+x)^5$ таким способом уже сложнее, а $(1+x)^8$ не захочет сосчитать самый трудолюбивый из вас. А впрочем, нужно ли считать? Не заготовлен ли ответ в соответствующей строчке треугольника Паскаля?

В начале строчки коэффициентов

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

совпадают с начальными строчками треугольника Паскаля. Чтобы доказать, что так будет и дальше, вновь достаточно найти действующий здесь закон перехода. Но, например,

$$(1+x)^5 = (1+x)(1+x)^4 = (1+x)(1+4x+6x^2+4x^3+1x^4);$$

коэффициент, скажем, при x^3 получается (при раскрытии последних скобок) как сумма коэффициентов при x^2 и x^3 из предыдущей строчки – получим $10 = 6 + 4$, как в треугольнике Паскаля. Ясно, что и это рассуждение – общее.

Мы установили, что *последовательность коэффициентов при возрастающих степенях x в раскрытии двучлена $(1+x)^n$ совпадает с $(n+1)$ -й строчкой треугольника Паскаля.*

Вновь треугольник Паскаля экономит нам время: взглянув на него, мы без вычислений сразу можем написать

$$(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + \\ + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9.$$

Свойства треугольника Паскаля

Отбросив нули, нашу таблицу можно переписать в более симметричной, треугольной форме (рис. 7).

Отметим два свойства этой таблицы:

1) *Каждая строка симметрична относительно своей середины.*

2) *Сумма чисел n -й строчки в два раза больше суммы чисел предыдущей и равна 2^n .*

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
.....

Рис. 7

Эти свойства нетрудно доказать, исходя из закона перехода. Но каждое из них можно доказать еще двумя другими способами – через число подмножеств и через коэффициенты двучлена. Проведите эти доказательства самостоятельно.

Подробнее о треугольнике Паскаля можно прочитать в брошюре В.А.Успенского «Треугольник Паскаля» («Популярные лекции по математике», выпуск 43, М.: «Наука», 1978).

Задачи

1. Из пункта A по сети дорог идет группа из 2^7 человек (рис. 8). На каждом перекрестке, начиная с A , пришедшие туда люди делятся пополам – половина идет по направлению l , половина – по направлению m . Сколько человек придет в пункты B, C, D, \dots, I соответственно?

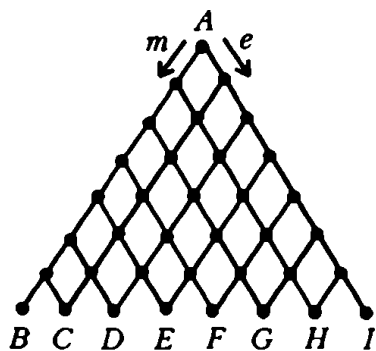


Рис. 8

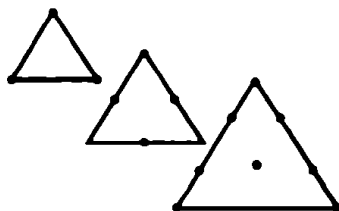


Рис. 9

2. Сколько существует а) двузначных; б) трехзначных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке?

3. Треугольным числом называется число целых точек в треугольниках такого вида, как на рисунке 9. Как найти треугольные числа в треугольнике Паскаля?

4. Представьте в виде суммы одночленов а) $(a - b)^6$; б) $(x - 2y)^5$.

ДЛЯ ЧЕГО НУЖНЫ ПРОЦЕНТЫ?

А.Савин

Много ли соли в морской воде? Этот вопрос можно понимать по-разному. Например, сколько весит вся соль, растворенная в морях и океанах. А можно и так: сколько содержится соли в ведре морской воды? Чтобы ответить на первый вопрос, достаточно знать ответ на второй и еще узнать, сколько ведер воды содержится в морях и океанах.

Жители приморских городов и поселков смогут ответить и на второй вопрос. Для этого достаточно набрать ведро морской воды, поставить его на огонь и греть, пока вся вода не выкипит, а затем взвесить оставшуюся на дне соль. Можно ли утверждать, что у соседа получится столько же? Видимо, нет. Его ведро может оказаться больше или меньше, налито оно может быть более или менее полно, в результате сосед будет выпаривать другое количество воды, а потому останется другое количество соли.

Таким образом, наша мера солености воды – количество граммов соли на ведро воды – оказалась неудачной. Возьмем другую меру – количество граммов соли на килограмм раствора. Для этого нужно до кипячения раствор взвесить, а потом вес полученной соли разделить на вес раствора. Пусть вес раствора 8,4 кг, а вес соли 21 г. Тогда получаем ответ:

$$\frac{21}{8,4} = \frac{5}{2}$$

грамма соли на килограмм раствора. Если опыт повторить, то опять получится такая же величина.

Но почему число граммов в килограмме, а не центнеров в тонне или английских фунтов в пуде? Давайте-ка будем считать число граммов в грамме! Тогда тот же ответ получится, если мы будем считать число тонн соли в тонне раствора или пудов в пуде.

Итак, поскольку в килограмме содержится 1000 граммов, то и ответ получится в 1000 раз меньший:

$$\frac{5}{2000} = \frac{1}{400}.$$

Подходящая мера получена, но запись... Скажите, какое число больше: $\frac{11}{1002}$ или $\frac{12}{1090}$? Сразу и не скажешь, нужно считать. Куда легче сравнивать десятичные дроби! Дробь 0,01097 меньше, чем 0,01101, потому что число единиц, десятых и сотых у них одинаково, а число тысячных у второй больше. Удобно? Конечно.

Ну, что ж, будем записывать результат не обыкновенной, а десятичной дробью. А дальше...

Стойте, скажет нетерпеливый читатель, зачем столько премудростей ради какой-то морской воды? Взять да и попробовать на вкус – соленая или не очень. Хорошо, отвечу я, а нужно ли точно знать содержание металла в руде, жира в молоке, химических веществ в лекарстве?.. Вот то-то. А ведь задача та же самая.

Итак, мы договорились записывать ответ в виде десятичной дроби. А с какой точностью? С помощью карандаша и бумаги мы можем делить даже до миллиардных долей, но откуда взялись сами числа? Если весы в магазине показывают 520 г, то на самом деле предмет может весить и 515, и 524 грамма. А двести – триста лет назад точность весов была еще меньше. Поэтому верными можно было считать лишь первые одну-две цифры, а потому и величину содержания одного вещества в другом имело смысл рассматривать с точностью до первых двух цифр: 0,27; 0,64; 0,37 и т.д., т.е. 27 сотых, 64 сотых, 37 сотых.

Вот мы и пришли к процентам, потому что в переводе с латыни «процент» – сотая часть. Была придумана и специальная запись 27%, 64%, 37%. Знак %, говорят, возник из-за ошибки наборщика, у которого сломалась литера, в результате чего и возник этот причудливый знак, признанный затем всем миром.

Запись отношений стала удобнее, исчезли ноль и запятая, а символ % сразу указывает, что перед нами относительная величина, а не граммы, литры, рубли или метры.

Проценты были известны индусам еще в V веке нашей эры. Это не удивительно, потому что в Индии с давних пор счет велся в десятичной системе. В Европе десятичные дроби появились на 1000 лет позже, их ввел бельгийский ученый Симон Стевин. Он же в 1584 году впервые опубликовал таблицу процентов.

Введение процентов оказалось удобным не только для оценки содержания одного вещества в другом. В процентах стали измерять изменение производства товаров, денежных доходов... Что только не измеряют в процентах, даже двоечников в школе!

Со временем люди научились извлекать из вещества его компоненты, которые составляют тысячные доли от веса самого

вещества. Тогда, чтобы не вводить нули и запятую, т.е. не писать 0,6%, ввели новую величину – «промилле» – тысячную долю, которую обозначили так: ‰, и вместо 0,6% стали писать 6‰. Однако эта величина привилась только в тех областях науки и техники, где имеют дело с малыми величинами, а необходимость и появившаяся возможность считать точнее привели к тому, что счет стал вестись до десятых и сотых долей процента. Нередко можно видеть и в технической литературе, и на страницах газет записи вида 27,4% ; 6,35%. Выражение величин в процентах стало для всех привычным, однако на классном собрании лучше сказать: «Сережа Федотов стал двоечником», чем «Число двоечников в нашем классе за полугодие увеличилось на 3,3%».

А теперь несколько задач на проценты.

1. Арбуз весил 20 кг, а сухое вещество в нем составляло 1%. Через некоторое время арбуз усох, и сухое вещество стало составлять 2%. Сколько стал весить арбуз?

2. Множимое увеличили на 10%, а множитель уменьшили на 10%. Как изменилось произведение?

3. Цену на товар уменьшили на 10%, а потом еще на 10%. Стал бы он дешевле, если его цену сразу снизили бы на 20%?

А.Розенталь

Если вы хотите научиться решать математические задачи, вам надо попытаться овладеть более или менее общими подходами, приемами и методами математических рассуждений. Рассмотрим один весьма общий подход, который мы будем называть *правилом «крайнего»*.

Правило «крайнего» может быть кратко выражено словами «Рассмотрите крайнее!» Это правило есть попросту рекомендация рассмотреть объект, обладающий какими-либо «крайними», или, как говорят математики, *экстремальными* свойствами. Если речь в задаче идет о множестве точек на прямой, то правило «Рассмотри крайнее!» советует нам сосредоточить свое внимание на самой крайней точке множества (самой левой или самой правой). Если в задаче фигурирует некоторый набор чисел, то правило «крайнего» рекомендует рассмотреть наибольшее или наименьшее из этих чисел. Вот несколько примеров.

Задача 1. *На плоскости задано некоторое множество точек M такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего какую-либо пару точек того же множества M . Докажите, что множество M содержит бесконечно много точек.*

Очень часто бывает так, что ключ к решению задачи находят, решая более простую аналогичную задачу.

Задача 2. *На прямой задано множество точек M такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего две другие точки из M . Докажите, что множество M бесконечно.*

Предположим, что множество M конечно. Применим правило «крайнего»: если множество M – конечное, то среди его точек есть крайние – самая левая и самая правая. Рассмотрим одну из них, например, самую левую; обозначим ее буквой A . Точка A – крайняя и потому не может лежать внутри отрезка, соединяющего две другие точки множества M ; значит, она не принадлежит

M . Полученное противоречие и доказывает, что множество M не может быть конечным.

Приведем еще одно решение этой задачи, использующее правило «крайнего». Допустим снова, что множество M конечно, и рассмотрим длины отрезков, соединяющих точки из M . Этот набор чисел конечен. Применим к нему наше правило в форме «Рассмотри наибольшее!» – рассмотрим отрезок BC наибольшей длины. Ясно, что вне отрезка BC нет точек из M , иначе существовали бы отрезки с большими длинами. Таким образом, все точки множества M лежат на отрезке BC и, значит, ни B , ни C не удовлетворяют условию, т.е. не принадлежат множеству M . Противоречие.

Вернемся теперь к задаче 1. Допустим, что множество M конечно. Снова применим правило «крайнего». Для этого зафиксируем положение плоскости и рассмотрим самую левую точку множества M , а если «самых левых» точек несколько, то возьмем самую нижнюю из них. Легко убедиться, что эта точка, обозначим ее через A , не может лежать внутри отрезка, соединяющего две точки множества M . Действительно, если бы такой отрезок существовал, то один из его концов находился бы либо левее A , либо на одной вертикали с точкой A , но ниже ее. Ни того, ни другого не сможет быть в силу выбора точки A .

Здесь, как и в задаче 2, тоже существует решение, основанное на рассмотрении попарных расстояний между точками множества M . Если множество M конечно, то и попарных расстояний конечное число, и среди них, руководствуясь правилом «крайнего», можно отыскать наибольшее. Пусть это будет расстояние между точками A и B . Но точка B является серединой некоторого отрезка CD , концы которого по условию принадлежат множеству M (рис. 1). Тогда легко доказать, что либо AD , либо AC больше AB (сделайте это самостоятельно, воспользовавшись тем, что медиана m , проведенная к одной из сторон треугольника, меньше полусуммы двух других сторон).

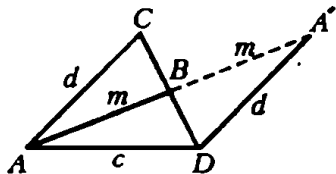


Рис. 1

Задача 3. На полях бесконечной шахматной доски написаны натуральные числа так, что каждое число равно среднему арифметическому четырех соседних чисел – верхнего, нижнего, правого и левого. Докажите, что все числа на доске равны между собой.

Решить эту задачу нам поможет правило «крайнего» в форме «Рассмотри наименьшее!». Среди натуральных чисел, записан-

ных на полях шахматной доски, непременно существует наименьшее. В этом нетрудно убедиться. Пусть k — одно из данных чисел. Если среди чисел, записанных на доске, имеется единица, то она и является таким наименьшим числом (не существует натуральных чисел, меньших единицы). Если единицы на доске нет, посмотрим, нет ли там двойки. Если есть, то она и является наименьшим числом, если же нет, то поищем на доске тройку, и т.д. Не более чем за k шагов мы отыщем таким образом наименьшее число m . Рассмотрим поле P , на котором оно записано. Обозначим числа, записанные на соседних полях, буквами a, b, c и d . По условию $m = (a + b + c + d) / 4$. Отсюда $a + b + c + d = 4m$. В силу выбора числа m имеем $a \geq m, b \geq m, c \geq m, d \geq m$. Если хоть одно из этих неравенств было бы строгим, то мы имели бы $a + b + c + d > 4m$, что противоречит условию. Значит, $a = b = c = d = m$.

Таким образом, если на некотором поле записано число m , то и на соседних полях записано число m . Отсюда следует, что на горизонтали, содержащей поле P , записаны одни только числа m . Но любая вертикаль пересекает эту горизонталь, т.е. она содержит число m , и, значит, все числа на вертикалях равны m . Значит, вообще все числа на доске равны m .

Задача 4. На квадратной шахматной доске размером $n \times n$ расставлены ладьи с соблюдением следующего условия: если некоторое поле свободно, то общее количество ладей, стоящих на одной с этим полем горизонтали и на одной с ним вертикали, не меньше n . Докажите, что на доске находится не менее $n^2/2$ ладей.

Эта задача — трудная. Однако умелое применение правила «крайнего» может существенно облегчить поиск решения. Именно, правило «крайнего» наталкивает на мысль рассмотреть ту из $2n$ линий доски — вертикалей и горизонталей, — на которой стоит меньше всего ладей. Может случиться, что есть несколько таких линий, «одинаково нагруженных» ладьями. Тогда выберем любую из них. Пусть эта линия — горизонталь (в противном случае повернем доску на 90° — вертикали станут горизонталями). Число ладей на этой горизонтали обозначим через k . Если $k \geq \frac{n}{2}$, то на каждой из n горизонталей не менее $\frac{n}{2}$ ладей, а всего на доске не менее $\frac{n^2}{2}$ ладей.

Пусть теперь $k < \frac{n}{2}$. На рассматриваемой горизонтали $n - k$ свободных полей, и каждая вертикаль, проходящая через такое свободное поле, содержит, как видно из условия, не менее $n - k$

ладей, а все такие вертикали – не менее $(n - k)^2$ ладей. Остальные k вертикалей содержат не менее чем по k ладей каждая (в силу выбора числа k). Всего на доске стоят не менее чем $(n - k)^2 + k^2$ ладей. Остается доказать, что $(n - k)^2 + k^2 \geq \frac{n^2}{2}$. Это можно сделать разными способами, вот один из них:

$$\begin{aligned} ((n - k)^2 + k^2) - \frac{n^2}{2} &= \frac{n^2}{2} - 2nk + 2k^2 = \\ &= 2\left(\frac{n^2}{4} - nk + k^2\right) = 2\left(\frac{n}{2} - k\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Если n – число четное, то можно найти удовлетворяющую условию расстановку, содержащую в точности $\frac{n^2}{2}$ ладей – достаточно поставить ладьи на все черные поля (или на все белые). Если число n – нечетное, то $\frac{n^2}{2}$ ладей расставить, соблюдая условия задачи, нельзя, так как число $\frac{n^2}{2}$ нецелое, но $\frac{n^2 + 1}{2}$ ладей расставить можно: одну ладью ставим на одно из угловых полей, а остальные – на поля того же цвета.

Аналогично решается следующая задача.

Задача 5. Пусть n^2 неотрицательных целых чисел расположены в виде таблицы, содержащей n строк и n столбцов. При этом выполнено следующее условие: если на некотором месте таблицы записан нуль, то сумма чисел столбца и строки, содержащих этот нуль, не меньше n . Докажите, что сумма всех n^2 чисел не меньше $n^2/2$.

А вот задача иного вида.

Задача 6. На плоскости заданы n точек. Никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что существует окружность, проходящая через три данные точки, не содержащая внутри ни одной из данных точек.

Проведем окружность через каждую тройку точек. Получим некоторое множество окружностей (некоторые из них могут слиться в одну). Требуется доказать, что хотя бы одна из этих окружностей не содержит внутри себя ни одной из данных точек. Правило «крайнего» может навести на мысль рассмотреть наименьшую окружность (окружность наименьшего радиуса), но это в данном случае ничего не даст (достаточно рассмотреть конфигурацию из таких точек: 4 вершины квадрата и его центр; наименьшей будет окружность, описанная около квадрата, а она

условию не удовлетворяет). Поступим иначе. Попробуем решить более простую задачу, а именно, будем искать окружность, проходящую через две из данных точек и не содержащую точек внутри себя. Измерим расстояния между каждыми двумя данными точками и, воспользовавшись правилом «крайнего» в форме «Рассмотрим наименьшее!», возьмем пару точек A и B , находящихся на наименьшем расстоянии друг от друга. Легко убедиться,

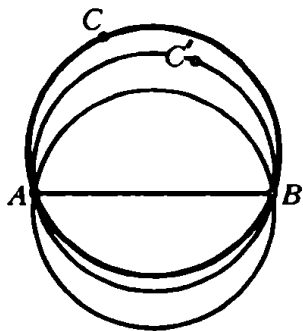


Рис. 2

что окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре, удовлетворяет условию: остальные $(n - 2)$ данные точки удалены и от A , и от B не менее чем на расстояние AB , а потому расположены вне этой окружности. Теперь проведем окружности через точки A и B и через каждую из остальных $(n - 2)$ точек. Вот среди этих окружностей выберем наименьшую, как нам подсказывает правило «Рассмотри наименьшее!». Пусть это будет окружность, проходящая через точки A, B, C . Она – искомая,

потому что любая окружность, проведенная через точки A и B и некоторую точку C' «серпа» (рис.2), меньше окружности, проходящей через точки A, B, C (докажите это самостоятельно).

Задача 7. На плоскости проведено n прямых ($n \geq 3$). Никакие две из них не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке. Эти прямые разрезают плоскость на части. Докажите, что какую бы из n прямых мы ни взяли, хотя бы одна из примыкающих к ней частей плоскости является треугольником.

Пусть l_1 – одна из данных прямых. Руководствуясь правилом «крайнего», из всех точек пересечения остальных прямых выберем ту, которая находится на наименьшем расстоянии от прямой l_1 . Пусть в этой точке, обозначим ее буквой P , пересекаются прямые l_2 и l_3 . Нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что треугольник, образуемый прямыми l_1, l_2 и l_3 , составляет одну часть плоскости и, следовательно, удовлетворяет условию задачи.

Задача 8. Докажите, что не существует четверки натуральных чисел x, y, z, u , удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$.

Допустим, что такие четверки существуют. Рассмотрим ту из них, для которой величина $x^2 + y^2$ минимальна (если есть

несколько четверок, у которых эта величина одинакова и минимальна, рассмотрим одну из них, любую). Пусть это будет четверка a, b, c, d . Из уравнения $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$ видно, что $a^2 + b^2$ кратно трем. Но легко доказать, что $a^2 + b^2$ делится на три тогда и только тогда, когда и a , и b делятся на три, потому что квадрат числа, не делящегося на три, дает при делении на три в остатке единицу.

Следовательно, $a = 3m, b = 3n$, откуда

$$a^2 + b^2 = 9m^2 + 9n^2 = 3(c^2 + d^2).$$

Сокращая последнее равенство на 3, получим:

$$c^2 + d^2 = 3(m^2 + n^2).$$

Мы нашли четверку чисел c, d, m, n , удовлетворяющую данному уравнению, причем для этой четверки

$$c^2 + d^2 < a^2 + b^2,$$

а это невозможно в силу выбора четверки a, b, c, d .

Задача 9. На плоскости расположены n прямых ($n \geq 3$). Любые две прямые пересекаются и через каждую точку пересечения проходят не менее трех из данных прямых. Докажите, что все прямые пересекаются в одной точке.

Пусть M – одна из точек пересечения прямых. Допустим, что она – не единственная. Тогда найдется прямая l данной системы, не проходящая через M . Множество точек пересечения прямых, не лежащих на l , непусто – оно содержит, например, точку M . Рассмотрите точку этого множества, ближайшую к l (а если имеется несколько точек, находящихся на минимальном расстоянии от l , то выберите одну из них, любую), и получите противоречие.

Вот еще одна аналогичная задача.

Задача 10. На плоскости заданы n точек ($n \geq 3$). Известно, что на всякой прямой, проходящей через 2 данные точки, расположена по крайней мере еще одна из данных точек. Докажите, что тогда все n точек лежат на одной прямой.

Развитием правила «крайнего» является «правило расположения», которое звучит так: «Расположите элементы исследуемого множества в порядке возрастания или в порядке убывания (или еще как-нибудь)!».

Задача 11. Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причем никакие двое не собрали одинакового числа грибов.

Докажите, что есть трое грибников, собравших вместе не менее 50 грибов.

Составим «таблицу первенства», поместив в ней грибников в порядке убывания числа собранных ими грибов. Ясно, что рассматривать надо грибников, занявших первые 3 места – они собрали грибов больше, чем любая другая тройка. Попробуем доказать, что они собрали не менее 50 грибов. Если грибник, занявший 3-е место, собрал 16 грибов или больше, то на 2-м месте – грибник, собравший не менее 17 грибов, а на первом месте – не менее 18 грибов. Вместе они собрали не меньше $16 + 17 + 18 = 51$ гриба. Если же грибник, занявший 3-е место, собрал не более 15 грибов, то грибники, занявшие места с 4-го по 7-е, собрали не менее $14 + 13 + 12 + 11 = 50$ грибов. На долю первой тройки и в этом случае остается не менее 50 грибов.

Р.Рубинов

В нынешнем учебнике геометрии теорема Пифагора «Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов» доказывается «алгебраически», выкладкой.

Евклид доказывал ее «геометрически». Он строил на сторонах прямоугольного треугольника квадраты и доказывал, что сумма площадей квадратов на катетах равна площади квадрата на гипотенузе. Сейчас мы приведем два доказательства теоремы Пифагора, использующие эту идею, а затем предъядим много других фигур, для которых выполнено то же «пифагорово соотношение», что и для квадратов.

Строим квадраты

На рисунке 1, а на катетах выделенного прямоугольного треугольника внутрь построены квадраты; квадрат на гипотенузе построен наружу. Везде, где один квадрат налегает на другой, стороны квадратов продолжены. Равновеликие фигуры¹ окрашены в одинаковый цвет. Из рисунка видно, что треугольник, образованный из темно-серой трапеции и светло-серого треугольника («серый» треугольник), равновелик треугольнику, образованному из заштрихованной трапеции и черного треугольника («черно-полосатый» треугольник). На рисунке 1, б на катетах исходного треугольника (теперь белого) квадраты построены внешним образом, причем в одном из них черно-полосатый треугольник заменен на

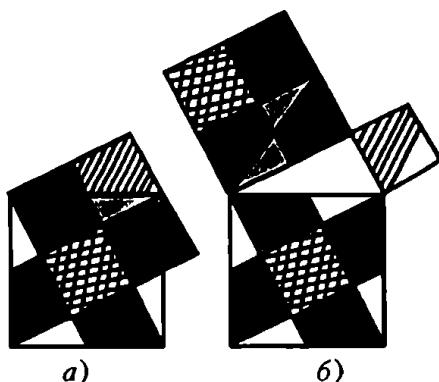
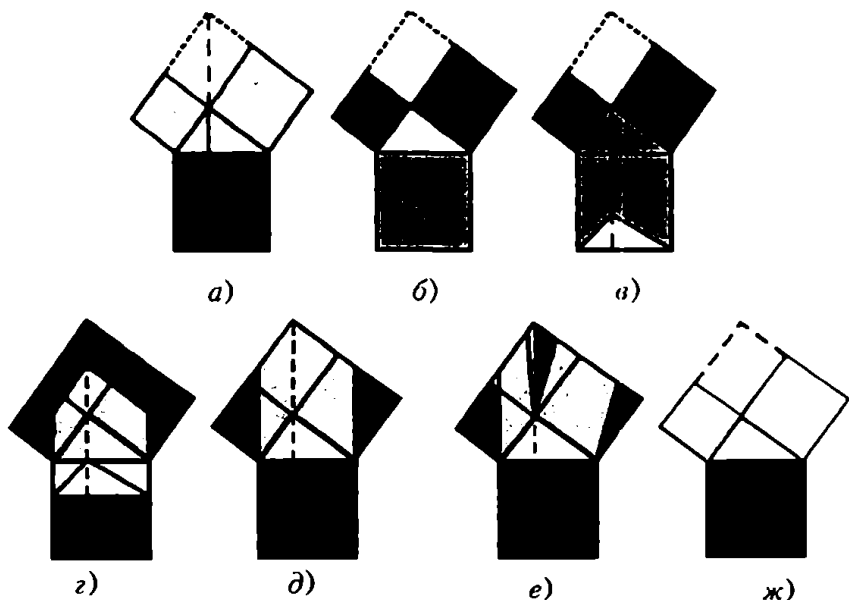


Рис. 1

¹ Т.е. фигуры, имеющие одинаковую площадь.



равновеликий ему серый. Заменяв еще раз полосатую трапецию с черным треугольником на серую трапецию с серым треугольником, получим нужное равенство площадей.

Еще одно доказательство получается из рисунков 2, б – ж; оно использует тот факт, что отмеченная высота в нашем прямоугольном треугольнике (рис. 2, а) и диагональ прямоугольника, образованного продолжениями сторон квадратов, лежат на одной прямой (докажите это!).

Обобщаем теорему Пифагора

Итак, в прямоугольном треугольнике

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

где a , b , c – его катеты и гипотенуза. Заметим теперь, что если у нас есть фигуры A , B и C , площади S_A , S_B и S_C которых равны, соответственно, ka^2 , kb^2 и kc^2 , то $S_A + S_B = S_C$. В частности, «пифагорово соотношение» выполняется для площадей подобных фигур, построенных на сторонах прямоугольного треугольника². (Это замечание может пригодиться для вычисления площадей фигур, которые мы будем рисовать ниже.)

² Мы говорим, что подобные фигуры F_a , F_b , F_c построены на сторонах a , b , c треугольника ABC , если при подобии $F_x \rightarrow F_y$ сторона x переходит в сторону y ($x, y \in \{a, b, c\}$).

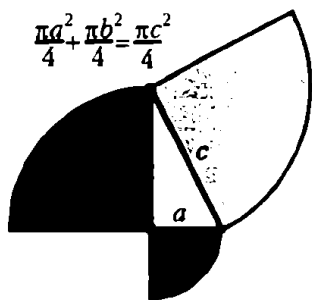


Рис. 3

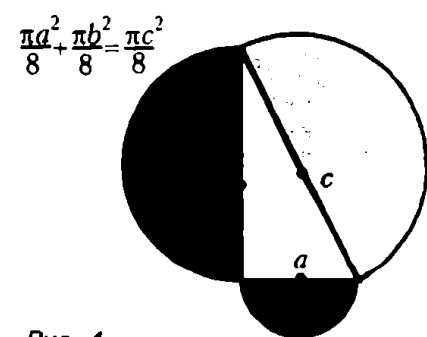


Рис. 4

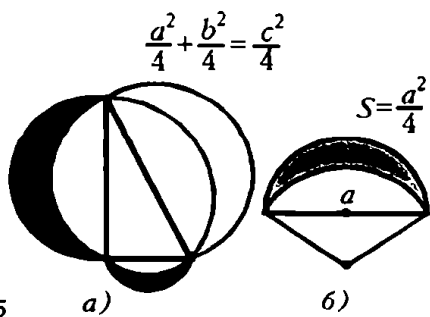


Рис. 5

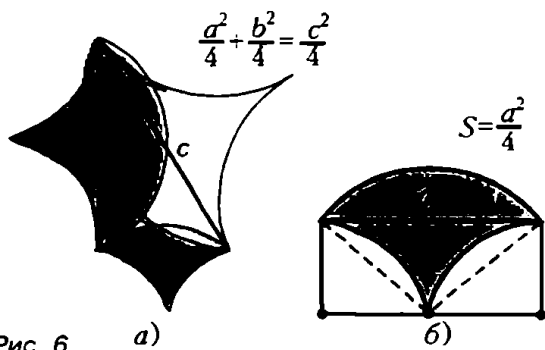


Рис. 6

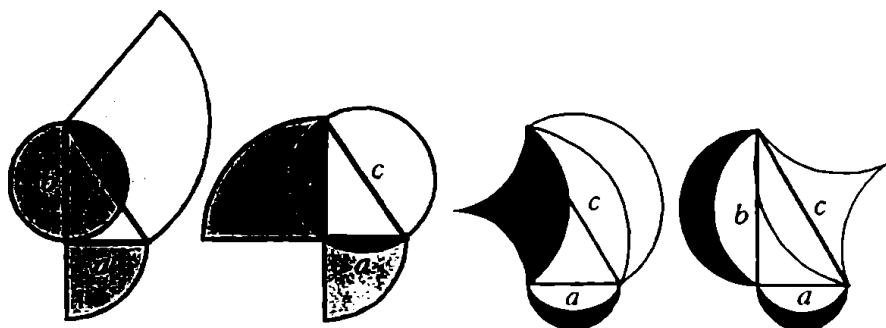


Рис. 7

Рис. 8

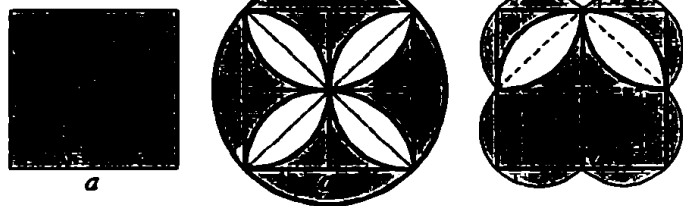


Рис. 9

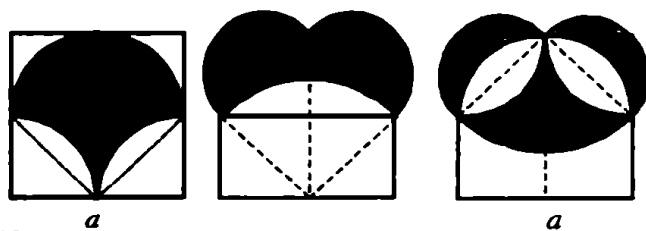


Рис. 10

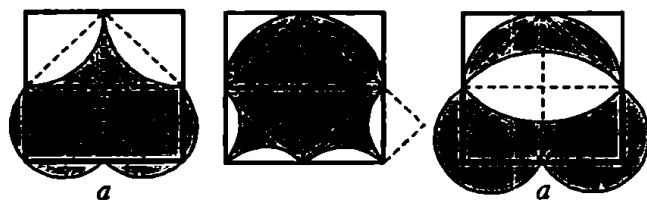


Рис. 11

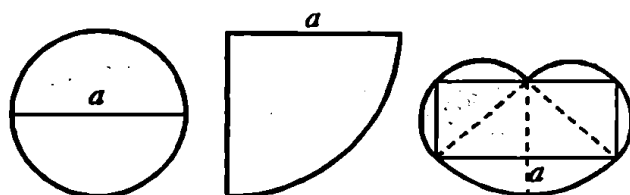


Рис. 12

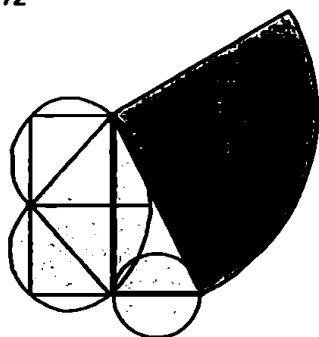


Рис. 13

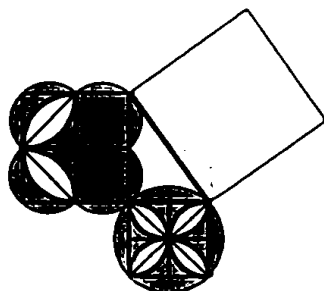


Рис. 14

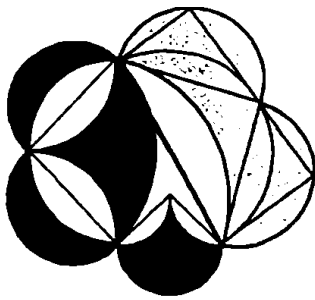


Рис. 15

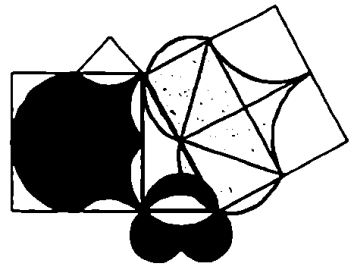


Рис. 16

На сторонах прямоугольного треугольника мы будем теперь строить секторы (рис.3), полуокруги (рис.4), луночки (рис.5), дуговые треугольники (рис.6).

Комбинируя секторы и круги, луночки и дуговые треугольники, мы получим рисунки 7 и 8: на них снова сумма площадей синих фигур равна площади красной фигуры.

На рисунках 9 – 12 изображено по три равновеликие фигуры: на рисунке 9 – площади a^2 (a – сторона квадрата), на рисунке 10 – площади $a^2/2$, на рисунке 11 – площади $3a^2/4$, на рисунке 12 – площади $\pi a^2/4$ (проверьте это!). Комбинируя их на катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника, получим серию рисунков 13 – 16.

В заключение мы предлагаем вам доказать, что сумма площадей трех темных криволинейных треугольников, построенных на сторонах прямоугольной трапеции, диагональ которой перпендикулярна боковой стороне (рис.17), равна площади такого же треугольника, построенного на большем основании. Теперь вам понадобится для этого не более двух минут!

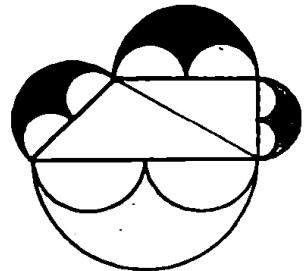


Рис. 17

А. Савин

Изучая геометрию в школе, вы встречаетесь с разными плоскими и пространственными фигурами. Так, вы уже знаете, что такое треугольник, квадрат, окружность, куб, пирамида, шар, конус, цилиндр. Конечно, этот перечень далеко не исчерпывает всего разнообразия форм, существующих в природе. Огромное количество замысловатых и причудливых форм способно создать и человеческое воображение. Естественно, что лишь немногие из этих форм имеют названия. Да и нужно ли все их называть?

Когда садовод сокрушается: «Проклятые птицы склевали у меня все вишни!» – ему безразлично, какие именно птицы это сделали – воробьи, дрозды или попугаи. Он говорит о существах, которые летают, садятся на ветки деревьев и не прочь полакомиться сочными вишнями. Знаете ли вы, что существует 8616 различных видов птиц? Можно ли запомнить все их названия? Конечно, нет. Зоологи разделили всех птиц на 40 отрядов: голуби, чайки, воробьиные и т.д., объединив в один отряд птиц, обладающих похожими свойствами. И если вы будете знать эти сорок отрядов, а также два-три десятка названий птиц, обитающих в вашей местности, то знакомство с птицами можно считать состоявшимся.

Так и в геометрии: вы знакомитесь с наиболее часто встречающимися фигурами. А можно ли выделить какие-нибудь интересные совокупности – «отряды» фигур? Да, и это одна из целей геометрии. Свойство, которое объединяет фигуры в тот «отряд», о котором мы хотим рассказать, называется *выпуклостью*.

Слово *выпуклый* не является для вас новым. Однако попробуйте дать этому понятию четкое определение – и вы увидите, что это сделать не так уж просто. Посмотрим, как это понятие определяется в «Словаре русского языка» С.И. Ожегова. Читаем: «*Выпуклый* – имеющий дугообразную поверхность, обращенную наружу». А что значит дугообразную? Читаем: «*Дуго-*

образный – имеющий форму дуги». Что же такое дуга? – «Дуга – часть окружности, круга, или другой кривой линии». Тут уже наше терпение лопается: во-первых, кривые линии могут быть самыми разнообразными, а во-вторых, круг – не линия. Исходя из этого определения выпуклости, можно ли что-нибудь утверждать о выпуклости (или невыпуклости), например, куба? Помоему, нельзя. Так что такое «определение» никак не может устроить математика.

В математике понятие *выпуклый* имеет четко определенный смысл. *Множество точек называется выпуклым, если вместе с любыми двумя его точками A, B этому множеству принадлежит и весь отрезок AB.*

Теперь довольно очевидно, что куб – выпуклое тело. А вот фигура на рисунке 1 не выпукла. Нетрудно понять, что любой треугольник является выпуклой фигурой. А четырехугольники могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми (рис.2).

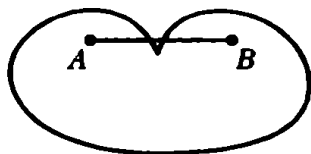


Рис. 1

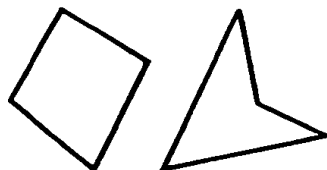


Рис. 2

Ну, а можно ли про выпуклые множества что-нибудь доказать? Можно. Например, докажите (это совсем просто), что пересечение двух или нескольких выпуклых множеств снова является выпуклым множеством (пустое множество также будем считать выпуклым). Более трудно доказать такое утверждение: *через любую точку границы выпуклой фигуры на плоскости можно провести прямую так, чтобы вся фигура лежала по одну сторону от этой прямой.* Такая прямая изображена на рисунке 3; она называется *опорной прямой*. Если граничная точка является «угловой», как на рисунке 4, через нее можно провести несколько опорных прямых. Докажите самостоятельно, что если некоторая плоская фигура имеет опорную прямую в каждой граничной точке, то эта фигура является выпуклой. Таким образом, сформулированное утверждение можно принять за определение выпуклой фигуры.

Думаю, что наличие опорных прямых у плоских выпук-



Рис. 3

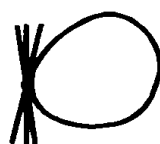


Рис. 4

лых фигур (аналогично – опорных плоскостей у выпуклых тел), хотя и является очень важным свойством, вряд ли кого удивит: оно довольно очевидно. Следующий факт гораздо более удивителен.

Теорема. *Если на плоскости задано несколько выпуклых фигур, каждые три из которых имеют общую точку, то найдется точка, принадлежащая одновременно всем этим фигурам.*

Требование выпуклости фигур существенно. Действительно, взгляните на рисунок 5: из четырех фигур, изображенных на

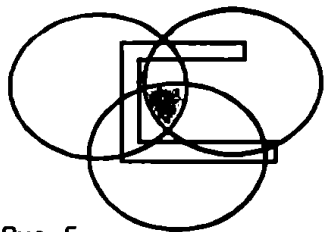


Рис. 5

ней, невыпукла лишь одна; однако, хотя у любых трех фигур есть общая точка, точки, принадлежащей одновременно всем четырем фигурам, нет.

А если на плоскости задано несколько выпуклых фигур, таких что любые две из них имеют общую точку? Обязательно ли найдется точка, общая для всех этих фигур? Покажите самостоятельно, что такой точки может и не быть.

Мы обратили внимание, что мы все время подчеркивали то, что рассматриваемые фигуры – плоские? И это неспроста,

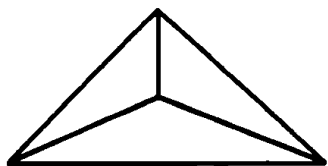


Рис. 6

потому что существуют четыре выпуклых тела в пространстве, каждые три из которых имеют общую точку, но нет точки, общей всем четырем телам, например, четыре грани треугольной пирамиды, изображенной на рисунке 6.

Значит, в пространстве подобная теорема уже не имеет места? Оказывается, чтобы она осталась верной и в пространстве, ее достаточно лишь немного «подправить». А именно:

Теорема'. *Если в пространстве задано несколько выпуклых тел, каждые четыре из которых имеют общую точку, то найдется точка, принадлежащая одновременно всем этим телам.*

Теорема, о которой мы только что рассказывали, была открыта не так давно – в начале 20-х годов нашего столетия – австрийским математиком Э.Хелли и носит его имя (Хелли сформулировал ее для выпуклых тел, расположенных в n -мерном пространстве). Теорему Хелли можно рассмотреть и для выпуклых множеств, лежащих на прямой (на прямой выпуклы-

ми множествами являются отдельные отрезки, лучи, а также вся прямая и пустое множество). На прямой теорема Хелли звучит так:

Теорема". *Если на прямой задано несколько выпуклых множеств, каждые два из которых имеют общую точку, то найдется точка, принадлежащая одновременно всем этим множествам.*

Попробуйте доказать эту теорему самостоятельно.

Если вас заинтересовали выпуклые фигуры, прочтите книгу И.М.Яглома и В.Г.Болтянского, которая так и называется: «Выпуклые фигуры».

1. Единственным таким числом является 3 816 547 290.

2. а) Утверждение следует из того, что $1991 = 11 \cdot 181$, а каждое из слагаемых делится на 11 и 181.

б) Запишите первое слагаемое в виде

$$(1993 - 1991) \cdot (1993 - 1989) \cdot (1993 - 1987) \cdot \dots \cdot (1993 - 1).$$

3. В первый магазин привезли 814 книг, во второй – 1026, в третий – 150.

4. Искомое число можно представить в виде $A \cdot 100 + 56$. Поскольку $A \cdot 100$ должно делиться на 56, то число A кратно 14, т.е. оно четно, делится на 7 и имеет сумму цифр, равную $56 - (5 + 6) = 45$. Наименьшим четным числом с суммой цифр 45 является 199998, но оно не делится на 7. Следующими по величине четными числами с такой же суммой цифр будут 289998 и 298998. Первое из них на 7 не делится, тогда как второе делится. Таким образом, ответом на вопрос задачи будет число $298998 \cdot 100 + 56 = 29899856$.

5. а) Не всегда. Если на всех 28 крайних клетках доски стоят 28 фигур, то выбрать из них 8 с требуемым свойством нельзя.

б) Всегда. Все фигуры соединим замкнутыми ломаными линиями, звенья которых параллельны сторонам доски; каждая такая ломаная имеет четное число вершин. Снимем с доски все фигуры через одну по обходу каждой ломаной.

6. Для доказательства утверждения задачи убедитесь сначала, что магический квадрат 3×3 однозначно определяется тремя числами a , b и c :

a	b	$3c - a - b$
$4c - 2a - b$	c	$2a + b - 2c$
$a + b - c$	$2c - b$	$2c - a$

7. Выигрывает второй игрок. Его стратегия – делать ходы, центрально симметричные ходам противника.

8. Если в каждой из 1990 строк хотя бы одно из чисел равно -1 , то утверждение задачи справедливо. Если же в k -й строке

строке ($2 \leq k \leq 1990$) все числа равны $+1$, причем k – наименьший номер строки с таким свойством, то все $(1992 - k)$ чисел предыдущей строки равны -1 , а во всем числовом треугольнике количество минус единиц не меньше, чем $(k - 2) + (1992 - k) = 1990$.

9. а) Нельзя. Заметьте, что если числа a и b делятся на некоторое число c , то координаты точек $(a - b; a)$ и $(a; b - a)$ тоже делятся на c . б) Можно. Свяжите обе точки с точкой $(0; 13)$.

10. Можно.

11. Воспользуйтесь формулой площади треугольника.

12. Равенство $987\ 654\ 321 - 123\ 456\ 789 = 864\ 197\ 532$ дает ответ на вопрос задачи.

13. Пусть N – количество внуков. Тогда N -й внук получил N яблок, а число яблок, полученных $(N - 1)$ -м внуком, должно равняться $(N - 1) + (10/9) \cdot N$. Из равенства $N - 1 + (10/9) \cdot N = N$ находим $N = 9$.

14. 378.

15. Требуемое свойство выполняется только при $n = 1$ и $n = 3$.

16. 267 способов; убрать следует букву «Р» во второй строке.

17. Дополнительно потребуется 3 трактора.

18. Достаточно разобрать 2 случая: угол MBN равен 60° и угол BNM равен 60° . В первом из них докажете сначала равенство треугольников ABN и DBN . Во втором – отметьте точку K на AB такую, что $AK = AN$, и докажете равенство треугольников KBN и DNM .

19. Искомое множество составляют: точка O – центр треугольника ABC , точка A' , симметричная A относительно BC , точки B' и C' , расположенные на продолжениях отрезков OB и OC за точки B и C соответственно и такие, что $BB' : OB = CC' : OC = 2$, а также точки окружности с радиусом AB и центром в точке A .

20. Спички следует разложить на кучки, содержащие, например, 1, 14, 27, 40, 53 и 65 спичек.

21. Пусть a_i – номер вертикали, на которой стоит ладья, занимающая i -ю горизонталь ($i = 1, 2, \dots, 8$; вертикали нумеруются слева направо, горизонтали – снизу вверх). Задача сводится к проверке равенства $1a_1 + 2a_2 + \dots + 8a_8 = 8(9 - a_1) + 7(9 - a_2) + \dots + 1(9 - a_8)$.

22. Решение показано на рисунке 1.

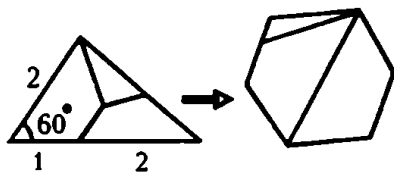


Рис. 1

23. Пара чисел (1 814 460, 1 814 340) является единственной, удовлетворяющей всем требуемым условиям.

24. Докажите сначала такой вспомогательный факт: сумма длин большего основания и одной из боковых сторон трапеции больше суммы длин меньшего основания и второй боковой стороны.

	1	2	3	4	5	6	7	8	В	Н	П	М
1	■	■	0:0			1:0	1:0	1:0	3	1	0	3:0
2		■			1:0	1:0	1:0	1:0	4	0	0	4:0
3	0:0		■		0:0	1:1	0:0		0	4	0	1:1
4				■	1:0	1:0	1:0	1:0	4	0	0	4:0
5		0:1	0:0	0:1	■			2:0	1	1	2	2:2
6	0:1	0:1	1:1	0:1		■			0	1	3	1:4
7	0:1	0:1	0:0	0:1			■		0	1	3	0:3
8	0:1	0:1		0:1	0:2			■	0	0	4	0:5

Рис. 2

25. Это число 1991.

26. Пусть получено ровно N частей, причем m раз резали на 6 частей и n раз – на 12. Поскольку при каждом таком разрезании общее число частей увеличивалось на 5 и на 11 соответственно, то нужно исследовать урав-

нение $1 + 5m + 11n = N$ при $N = 40$ и при $N \geq 41$.

27. $-3, 2, 4, 5, 8$.

28. Необходимо учесть, что школьники, живущие на нижних этажах, могут и не пользоваться лифтом. Лифтеру нужно поднять 13 школьников на 14-й этаж.

29. См. рисунок 2.

30. См. рисунок 3.

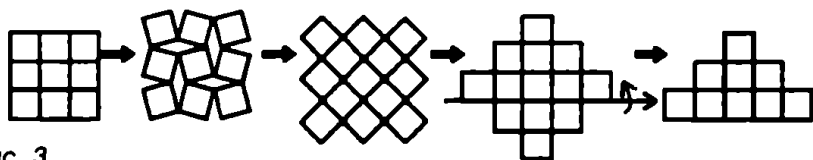


Рис. 3

31. $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : (6 : 7 : 8 : 9 : 10) = 7$.

32. Можно. Пример такой укладки показан на рисунке 4.

33. Можно воспользоваться тем, что тремя своими медианами треугольник разбивается на 6 равновеликих треугольников. Предположив, что точка P лежит внутри какого-либо из них, придите к противоречию с условием задачи.

34. Это число 1,125.

35. Вот одно из решений. Разрежем прямоугольник так, как показано на рисунке 5, и, перегнув бумагу, положим заштрихованные прямоугольники на незаштрихованные. В результате получится двухслойная развертка куба.

36. 45 копеек.

37. Заметьте, что в каждого гангстера может попасть не более

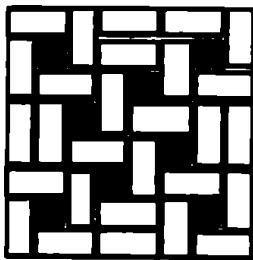


Рис. 4



Рис. 5

6 пуль. Кроме того, если A – гангстер, в которого попало 6 пуль, то в гангстера B , в которого выстрелил A , попало не более 4 пуль. Выведите отсюда, что наименьшее возможное число убитых равно 10.

38. Стороны всех квадратов можно выразить через стороны трех самых маленьких из них. Приравняв друг другу выражения для противоположных сторон прямоугольника, решите получившуюся систему уравнений в целых числах. Искомые стороны равны 422 и 593.

39. $21\ 649 \cdot 513\ 239 = 11\ 111\ 111\ 111$.

40. Рассмотрите прямоугольник $ABCD$ и точку E на стороне CD такую, что $AE \parallel CM$; угол EAN будет равен углу между AN и CM . Докажите, что треугольник AEN – равнобедренный и прямоугольный.

41. Эти странные часы показывают верное время в течение часа с 0 ч 00 мин до 1 ч 00 мин и еще в 10 моментов времени: 3 ч 60/11 мин, 5 ч 120/11 мин, ..., 21 ч 600/11 мин.

42. Занумеровав стулья числами от 1 до 12 по часовой стрелке, обозначим через a_i номер стула, на который сел после перерыва собеседник, сидевший ранее на i -м стуле ($i = 1, \dots, 12$). Доказав, что среди разностей $i - a_i$ найдутся две, дающие одинаковые остатки при делении на 12, выведите отсюда утверждение задачи.

43. Передвиньте квадрат параллельно одной из его сторон так, чтобы одна из вершин оказалась на границе полосы. Проведя из этой вершины высоту полосы, рассмотрите получившиеся пары равных треугольников.

44. Гусейну Гуслия достались кошельки с 5 и 7 таньга.

45. Допустим, что $A = x + 2y + 5z + 10t + 20u + 50v + 100w$ и $x + y + z + t + u + v + w = B$. Тогда, умножив второе уравнение на 100, имеем $100B = 100x + 50(2y) + 20(5z) + 10(10t) + 5(20u) + 2(50v) + 1(100w)$. Объединяя это равенство с первым уравнением, получаем требуемый размен.

46. Заметьте, что вничью должна закончиться ровно треть

матчей. Так как в турнире 17 команд, число матчей $(17 \cdot 16) : 2 = 272$ на 3 не делится, число побед у всех команд не может равняться числу ничьих. Для турниров же 15 и 16 команд постройте примеры, показывающие, что ответ на вопрос задачи утвердительный.

47. Условию задачи удовлетворяют только два числа:

$$1\ 122\ 250\ 000 = 33\ 500^2 \text{ и } 4\ 422\ 250\ 000 = 66\ 500^2.$$

48. Рассмотрев два четырехугольника, около каждого из которых можно описать окружность, воспользуйтесь свойствами вписанных углов и признаком параллельности прямых.

49. Это числа 96420 и 87531.

50. Воспользуйтесь тем, что шахматная доска симметрична относительно диагонали, и тем, что все недиагональные клетки, покрываемые восемью рассматриваемыми костяшками, имеют один цвет.

51. Можно, если, например, перекачивать кубик по прямоугольнику из 10 клеток (см. рисунок 6, где сторона каждого квадрата равна по длине ребру кубика). Вот нужный маршрут:

A	B	C	D	E
a	b	c	d	e

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow$$

$$\rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow A.$$

Рис. 6

52. Не сумеет.

53. Заметим, что любое из чисел a , b , c является делителем произведения двух остальных. Отсюда следует, что если abc делится на простое число p , то abc делится и на p^n , где $n \geq 2$. Но тогда найдутся целые $x \geq 0$, $y \geq 0$ такие, что $p^n = p^{3x} \cdot p^{2y}$, откуда и вытекает утверждение задачи.

$$54. \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}.$$

55. Необходимо учесть, что бегемот – травоядное животное и поэтому рыбу не ест. Обозначив через x , y и z число рыб, съеденных соответственно кашалотом, пеликаном и гавиалом, получим соотношения $x + y + z = 37$, $x \cdot z = y^2$, $x > y > z$. Им удовлетворяет только одна тройка натуральных чисел: $x = 16$, $y = 12$, $z = 9$.

56. Можно воспользоваться тем известным фактом, что сумма длин отрезков, соединяющих точку M с вершинами треугольника, больше полупериметра, но меньше периметра этого треугольника.

57. 3 или 4 команды.

58. 2029 серий.

59. 970 299.

60. Разрежем поверхность кубика по всем красным линиям. Если утверждение задачи неверно, то поверхность не распадется. Тогда, чтобы разрезать ее на 24 квадрата, потребуется не меньше 23 разрезов по синим отрезкам. Но синих отрезков у нас всего 22. Противоречие.

61. Утверждение формулируется так: число $A_n = (n+1)(n+2) \dots (2n-1)2n$ делится на 2^n , но не делится на 2^{n+1} . Для доказательства умножьте A_n на $n!2^n$.

62. Требуемое заполнение клеток числами можно сделать, например, вот так. Сначала раскрасим таблицу в шахматном порядке, а затем в белые клетки начнем вписывать последовательно числа 1, 2, ..., 677, притом слева направо: сначала в первой строке, потом во второй и т.д. Числа от 678 до 1353 будем записывать в черных клетках справа налево, начиная с последней строки и далее вверх.

63. Нельзя.

64. В обоих случаях выигрывает игрок, берущий спички первым.

65. 7.

66. Скорость конца стрелки пропорциональна ее длине и угловой скорости вращения. Обозначим длины часовой и минутной стрелок через r и R , тогда скорость конца часовой стрелки равна kr , а скорость минутной $12kR$. Относительная скорость концов стрелки минимальна и равна $12kR - kr$, когда они совпадают. Это скорость максимальна и равна $12kR + kr$, когда угол между стрелками – развернутый. Отношение минимальной скорости к максимальной заключено между $11/13$ и 1, так как $R > r$. Остается заметить, что $8/10 < 11/13$ и $10/12 < 11/13$.

67. Заметьте, что если A и B – узлы клетчатой бумаги, а точка M такова, что отрезки AB и BM равны и перпендикулярны, то точка M также является узлом.

68. Воспользуйтесь тем, что число $a^{4k+1} - a$ кратно 10 при любых натуральных a и k .

69. Можно.

70. Уравнению удовлетворяют семь троек: $(2;2;2)$, $(4;2;1)$, $(4;1;2)$, $(2;4;1)$, $(2;1;4)$, $(1;4;2)$, $(1;2;4)$.

71. Нам будет удобно считать, что книги расположены по кругу, т.е. за томом, стоящим на полке последним, следует том, стоящий на полке первым. Убедитесь, что операция, заключающаяся в перестановке тома с третьего места и двух последующих перестановках томов с восьмого места, циклически передвигает семь томов, кроме тома, стоящего на третьем месте. При этом,

применяя указанную операцию достаточное число раз, мы можем добиться, чтобы «неподвижный» том оказался стоящим за любым выбранным нами томом. Отсюда легко вывести утверждение задачи.

72. 35 964.

73. Заметьте, что

$$\begin{aligned}\angle BNM + \angle BMN &= \angle BAC + \angle BCA > \angle MCA + \angle NAC = \\ &= \angle ANM + \angle CMN.\end{aligned}$$

74. 9 дней; в невисокосном году это могут быть 1 февраля, 1 марта, 1, 3, 10, 17, 24 и 31 мая и 1 ноября, а в високосном – 1 января, 1 апреля, 1 июля, 1, 2, 9, 16, 23 и 30 сентября.

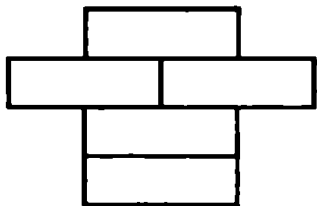


Рис. 7

75. Можно; например, так, как показано на рисунке 7.

76. Утверждение задачи вытекает из тождества

$$a(a+2)^3 - (a+1)(a-1)^3 = (2a+1)^3.$$

77. Можно; сумма грузов на каждой грани должна равняться 18 граммам.

78. Пусть ABC – искомый треугольник, M – точка пересечения его медиан, O – центр описанной окружности. Будем считать, что еще одна данная точка является общей для описанной окружности и биссектрисы угла ACB . Эта точка (обозначим ее D) является серединой дуги AB , которая не содержит точку C . При гомотетии с центром M и коэффициентом $-1/2$ описанная окружность треугольника ABC перейдет в окружность, содержащую середины его сторон. Построив последнюю, найдем точку пересечения ее с отрезком OD ; это будет середина стороны AB . Дальнейшее ясно.

79. 370 и 371.

80. а) 3997/3986; б) 996002.

81. Нельзя, так как возможна ситуация, показанная на рисунке 8. Здесь княжествам соответствуют точки, любые две из

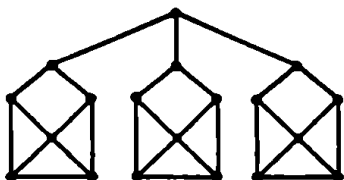


Рис. 8

которых соединены отрезком в том и только в том случае, когда соответствующие княжества дружелюбны.

82. Этому соотношению удовлетворяют три пары натуральных чисел: (1993; 1993); (997·1993; 997); (997; 997·1993).

83. Начинаящий выиграет, если, сделав первый ход на 49-ю клетку, каждый свой следующий ход будет делать на клетку с максимально возможным номером.

84. Не существует.

85. Из условия задачи следует, что углы ABC и BAC – острые. Проведем через точку B перпендикуляр к стороне AB ; пусть F – точка пересечения этого перпендикуляра с продолжением стороны AC . Доказав равенство $CF=AB$, заметьте, далее, что не равенства $BO > AO$ и $BO < AO$ равносильны неравенствам $BC > AC$ и $BC < AC$ соответственно. Для доказательства последних проведите в прямоугольном треугольнике ABF медиану BM' ; будут выполняться (это известный факт) равенства $BM' = AM' = M'F$. Если при этом сторона AB в треугольнике ABC – наибольшая, то $BC > BM' - M'C = AM' - M'C = AC$, а если наименьшая, то $BC < BM' + M'C = AM' + M'C = AC$.

86. Указанную сетку можно представить в виде 8 ломаных длины 5 и нельзя – в виде 5 ломаных длины 8.

87. 4.

88. Не существует. Для доказательства воспользуйтесь утверждением: если P – многочлен с целыми коэффициентами и $P(m)$ кратно 3 при некотором целом m , то $P(m + 3k)$ кратно 3 при любом целом k .

89. Необходимо иметь в виду, что до 1994 года в обращении находились купюры достоинством 1, 3, 5, 10, 25, 50 и 100 рублей. Воспользуйтесь также тем, что при увеличении числа в 10 раз его остаток от деления на 9 не изменится.

90. Указанная сумма может равняться только нулю.

91. Первое число больше. Для доказательства представьте его в виде $(1 \cdot 1993) \cdot (3 \cdot 1991) \cdot (5 \cdot 1989) \cdot (1991 \cdot 3) \cdot (1993 \cdot 1)$.

92. 25.

93. 60° . Сначала необходимо установить, что указанные точки M и N существуют, если только $AB = BC$.

94. Такими числами являются, например, числа вида $999\dots 99$, поскольку каждое такое число записывается в виде 10^k , а его квадрат – в виде $10^{2k} - 2 \cdot 10^k + 1 = 999\dots 99800\dots 01$, причем девяток в этой записи ровно $(k - 1)$.

95. Указанная расстановка 15 белых и 15 черных фигур существует.

96. 130.

97. Искомых чисел нет.

98. Посчитайте двумя способами сумму площадей треугольников ABN , BCK , CDL и DAM .

99. Если $ABC = 0$, то, очевидно, $A = B = C = 0$. Пусть теперь

A , B и C отличны от нуля, D — их наибольший общий делитель. Положив $A = A_1 D$, $B = B_1 D$, $C = C_1 D$ и получив равенства $A_1(A_1 + B_1) = B_1(B_1 + C_1) = C_1(C_1 + A_1)$, докажите что $|A_1| = |B_1| = |C_1| = 1$.

100. Все 100 кнопок должны быть нажаты. Для доказательства возьмите произвольную кнопку K и рассмотрите «крест» из 19 кнопок (который составляют K и все кнопки, находящиеся с ней в одном вертикальном или горизонтальном ряду). Проверьте, что изменить четность числа горящих кнопок в этом «кресте» невозможно, не нажав K .

101. Это степени двойки.

102. Используя теорему о биссектрисе внутреннего угла треугольника, докажите, что $AC \cdot BD = AD \cdot BC$; затем снова примените эту теорему.

103. Разбив заданное слово на 399 пятибуквенных, убедитесь, что каждое из них разбивается не более чем на два палиндрома.

104. На доске 9×9 такой маршрут невозможен. В самом деле, пусть угловые клетки доски — черные. Тогда каждая из 16 черных клеток, расположенных на краю доски, должна быть связана диагональным ходом с одной из 12 черных клеток, имеющих общие вершины с крайними. Получается, что на каких-то из 12 указанных клеток королю пришлось бы, вопреки условию, побывать более, чем по одному разу.

105. Разложите монеты на три пары и сравните сначала массы этих пар между собой.

106. Пусть N — натуральное число, a , b — его делители, $2(a + b) = N$. Тогда $a = N/c$, $b = N/d$, где c и d — также делители, и $2N/c + 2N/d = N$, откуда $cd = 2(c + d)$ или $(c - 2)(d - 2) = 4$. Последнее равенство выполняется (с учетом $c \neq d$), если только $c = 6$, $d = 3$ или $c = 3$, $d = 6$. Итак, все искомые числа должны делиться на 6. Тождество же $6n = 2(2n + n)$ показывает, что все числа, кратные 6, условию задачи удовлетворяют.

107. Да, могло.

108. Рассуждая от противного, воспользуйтесь тем, что две окружности, имеющие три общие точки, совпадают.

109. Утверждение следует из тождества $(a - 3)(a - 1)(a + 1)(a + 3) + 16 = (a^2 - 5)^2$.

110. Достаточно доказать равенство углов ABC и BAD . Воспользуйтесь теоремой о величине вписанного угла, а также тем, что величина угла между касательной и секущей, проведенными к окружности из одной точки, равна полуразности угловых величин дуг, заключенных внутри угла.

111. 4. Пример нужной расстановки получим, поставив

королей на поля $a1, a8, h1, h8$, ферзей – на $b3, d7, e2, g6$, слонов – на $a5, c5, f4, h4$.

112. Существуют. Например, числа 1995, 2 и еще 1993 единицы.

113. Выигрывает B .

114. Рассмотрим окружность с центром в точке A и радиусом BC , окружность с центром в точке B и радиусом AC , окружность с центром в точке C и радиусом AB . Искомой точкой M будет центр окружности, касающейся внешним образом трех указанных окружностей.

115. Рассмотрим 16 квадратов размером 5×5 , центры которых отмечены на рисунке 9. Нетрудно убедиться, что любые две клетки таблицы будут входить в разные наборы таких квадратов и поэтому все числа могут быть однозначно восстановлены. С другой стороны, меньше, чем за 16 вопросов восстановить расстановку нельзя. В самом деле, на границе большого квадрата имеются 32 точки, каждая из которых служит общей вершиной для двух квадратов 1×1 . Любой из квадратов, о которых задаются вопросы, может иметь своими вершинами не более двух из этих точек. Отсюда следует, что должно быть задано не менее, чем $32 : 2 = 16$ вопросов.

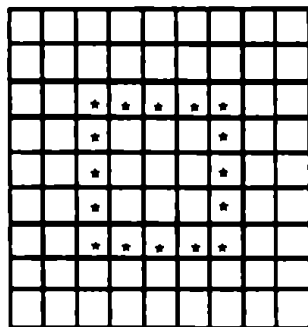


Рис. 9

116. Заметьте, что если тройка чисел (a', b', c') получена указанной операцией из тройки (a, b, c) , то наименьшее из чисел a', b', c' не меньше наименьшего из чисел a, b, c .

117. На биссектрисе угла ABC имеется точка X такая, что $MX = MA$, $KX = KC$ и угол KXM равен 90° .

118. 599.

119. Можно.

120. Рассмотрим следующие 12 полей: $a1, a2, b2, a8, b8, b7, g7, h7, h8, g1, g2, h1$. Конь может стоять на одном из них, либо бить ровно одно из них, но не может делать то и другое одновременно.

121. $1995 = 7 + 8 + 9 + \dots + 63$.

122. 18л.

123. 1366.

124. Наибольшее значение достигается, например, при $A = D = 1$, $B = C = 999$.

125. Пусть M' и P' – середины отрезков MB и PD соответственно. Тогда равны треугольники $MM'N$ и $PP'Q$,

откуда $MM' = PP'$. Поэтому $AB = CD$. Аналогично устанавливается равенство $AD = BC$.

126. Вот этот путь: $A - Г - И - Д - Ж - В - З - Б - Е$.

127. Докажите сначала, что отрезок AE является диаметром окружности, а четырехугольники $ABCD$ и $BDEC$ – равнобокими трапециями.

128. Искомая наибольшая сумма равна 276; она достигается, например, при установке ферзей на поля с номерами 6, 13, 23, 32, 40, 47, 53 и 62.

129. Деля число $k!$ на $1, 2, \dots, k$, получим нужные k чисел.

130. Положим $l = ad$, $m = bd$, $n = cd$, где $d = \text{НОД}(a, b, c)$. Тогда $ab + bc = ac$, откуда $\sqrt{ab/c} + \sqrt{bc/a} = \sqrt{ac/b}$. Осталось заметить, что если произведение любых двух из чисел a, b, c делится на третье и $\text{НОД}(a, b, c) = 1$, то имеют место формулы $\text{НОД}(a, b) = \sqrt{ab/c}$, $\text{НОД}(b, c) = \sqrt{bc/a}$, $\text{НОД}(a, c) = \sqrt{ac/b}$.

131. В полтора раза.

132. Докажите, что удаленные квадратики примыкали к одной стороне вписанного квадрата, причем после их удаления не осталось ни одной точки на этой стороне.

133. Пусть M_1, M_2, \dots, M_{10} – массы скульптур; тогда $|M_1 - M_2|, |M_2 - M_3|, \dots, |M_{10} - M_1|$ – массы шаров. В тождестве $(M_1 - M_2) + (M_2 - M_3) + \dots + (M_{10} - M_1) = 0$ некоторые из чисел, заключенных в скобки, положительны, а остальные отрицательны. Остается заметить, что сумма модулей положительных скобок равняется сумме отрицательных скобок.

134. Возможно.

135. (2; 5) и (5; 2).

136. Ни одно из указанных чисел не делится на 4.

137. Воспользуйтесь тем, что в любой пятиконечной звезде сумма углов равняется 180° .

138. 3 доллара 61 цент.

139. Можно, например, доказать обратное утверждение и заметить, что все сделанные преобразования обратимы.

140. Рассмотрим какие-нибудь три подряд стоящие клетки – прямоугольник 3×1 . Нетрудно проверить, что, нажимая только эти клетки, можно погасить все светящиеся клетки рассматриваемого прямоугольника. Рассмотрим теперь квадрат 3×3 . Используя его симметрию относительно среднего трехклеточного столбика, а также сделанное выше замечание, докажите, что такое же утверждение верно и для квадрата 3×3 . Опираясь на это, докажите справедливость утверждения для

прямоугольника 3×7 и, рассуждая аналогично, — для квадрата 7×7 клеток.

141. Если n чётно, то все $(n+2)(n+1)/2$ косточек можно выложить в цепочку. Если же n нечётно, то искомое наибольшее число косточек равно

$$(n+2)(n+1)/2 - (n-1)/2 = (n^2 + 2n + 3)/2.$$

142. Это степени двойки.

143. Возьмем круг, который разделен 18 диаметрами на 36 равных секторов, притом такой, что один из диаметров параллелен одной из сторон заданного 19-угольника. Тогда каждая сторона 19-угольника будет параллельна одному из диаметров, а так как число сторон больше числа диаметров, то обязательно найдутся две стороны, параллельные одному диаметру и, следовательно, параллельные между собой.

144. Даша старше.

145. а) Нет. Рассмотрите случай, когда книги стоят первоначально в порядке убывания.

б) Нет. Здесь в цепочке $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8$, где A_k означает k -ю по величине книгу, осуществить можно лишь шесть из семи необходимых сравнений A_k с A_{k+1} .

146. Используя разложение $111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$, $7111 = 13 \cdot 547$, $11711 = 7 \cdot 1673$, $11171111 = 7 \cdot 1595873$, докажите, что в числе, состоящем из одной семерки и нескольких (не меньше двух) единиц, перестановкой цифры 7 можно добиться, чтобы полученное число было составным.

147. Переставим все четные вертикальные полосы вправо, а нечетные влево, после этого все четные горизонтальные полосы вниз, а нечетные вверх. Получим в итоге 4 прямоугольника — два черных и два белых. Докажите, что одна из прямых, проходящих по сторонам этих прямоугольников, делит площадь квадрата пополам; отсюда легко выводится утверждение задачи.

148. Такими числами являются лишь числа вида $125 \cdot 10^k$, где k — целое неотрицательное число.

149. Повернем треугольник ABC на 60° вокруг точки M , как это показано на рисунке 10; точки A, B, C перейдут в точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Треугольники $A_1 B_1 B$ и CBM равны, откуда $A_1 B = MC$.

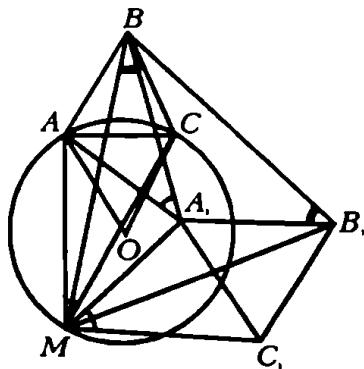


Рис. 10

Треугольники A_1AB и MAC равны по трем сторонам, а так как $\angle AMC = 30^\circ$, то и $\angle AA_1B = 30^\circ$. Треугольник A_1AM — равносторонний, поэтому $\angle A_1AM = 60^\circ$, откуда $\angle MA_1B = 90^\circ$. По теореме Пифагора $(MA_1)^2 + (A_1B)^2 = MB^2$. Но $MA_1 = MA$, $A_1B = MC$. Тем самым утверждение задачи доказано.

150. Выделив в квадрате 19×19 24 прямоугольника 3×5 , как это показано на рисунке 11,а, докажите, что хотя бы в одном из них закрашено не менее трех клеток. На рисунке 11,б закрашено

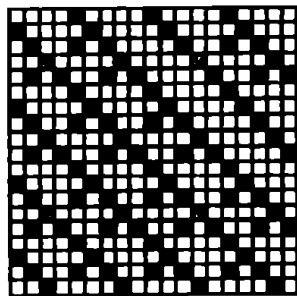
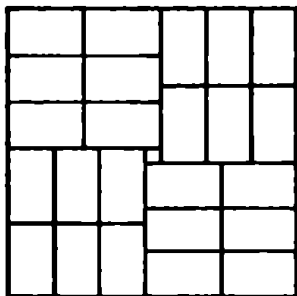


Рис. 11

96 клеток так, что любой прямоугольник 3×5 содержит не менее четырех закрашенных клеток.

151. Можно доказать, например, что сумма чисел на k -й ($k = 1, 2, 3, \dots$) диагонали равна $k(k+1)(k+2)/6$.

152. $(4 + \sqrt{17}) \cdot a$.

153. Нет, так как все получающиеся двузначные числа будут обязаны делиться на 9.

154. Вырезан квадрат, центр которого совпадает с центром доски.

155. Докажите, что длина стороны равностороннего треугольника, содержащего центры всех пяти кругов, не может быть меньше 4.

156. Нет.

157. a .

158. 959595.

159. Равенства

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 99! \cdot 100! = (1!)^2 \cdot 2 \cdot (3!)^2 \cdot 4 \cdot (5!)^2 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (99!)^2 \cdot 100 = \\ = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \dots \cdot 99!) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 100 = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \dots \cdot 99!)^2 \cdot 2^{50} \cdot 50!$$

показывают, что, вычеркнув $50!$, мы получим точный квадрат.

160. См. задачу 117.

161. Нельзя. Рассмотрите в таблице 13-клеточную диагональ и заметьте, что любая клетка таблицы либо не граничит ни с

одной из клеток этой диагонали, либо граничит ровно с двумя ее клетками.

162. $140^\circ, 20^\circ, 20^\circ$.

163. Воспользуйтесь тождеством $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$.

164. Наибольшее число цветов – пять.

165. Достаточно показать, что найдутся два равных одноименных отрезка.

166. Нет. Рассмотрите остатки при делении на 4.

167. 50.

168. $k = 3$.

169. $7926,5 + 7926,5 = 15853$.

170. После $1995 \cdot 1995 + 1$ ходов на некотором поле фишка побывает более 1995 раз. Каждый раз она уходит от него на одно поле дальше, чем в предыдущий. Поэтому на каждое из 1995 полей будет сделан хотя бы один ход.

171. Может.

172. Исходные равенства преобразуются к виду $(x - y)(1 - z) = 0$ и $(x - z)(1 - y) = 0$.

173. 2.

174. Опустите перпендикуляр $МК$ на сторону $АВ$ и рассмотрите прямоугольник $ВМК$.

175. Существует; например, число $36 \cdot 1995$.

176. 21 978.

177. Нельзя. Заметьте, что диагональ прямоугольника, состоящего из нечетного числа клеток, не может равняться диагонали прямоугольника, состоящего из четного числа клеток.

178. Введите систему координат xOy и рассмотрите такой набор точек: $O(0;0), P(0;1), Q(1;1), R(1;0), S(0,4;0,5), T(0,5;0,6)$.

179. Искомые углы равны 90° и 60° соответственно.

180. 142 857.

181. Воспользуйтесь тождеством $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2$.

182. Заметьте сначала, что n нечетно. Разобрав случаи $n = 3, 5, 7$, для $n \geq 9$ рассмотрите две возможности: $n = 4k + 1$ и $n = 4k + 3$.

183. Отец прав.

184. Убедитесь, что каждое последующее число меньше предыдущего, положительно и кратно 7.

185. Нельзя. Занумеруйте лампочки, начиная с горячей, числами от 1 до 12 по кругу и убедитесь, что среди лампочек с номерами 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11 число горящих всегда будет нечетным.

186. $108^\circ, 36^\circ, 36^\circ$.

187. 12 см. Воспользуйтесь тем, что при преобразованиях площадь треугольника не меняется.

188. Заметив, что сумма всех 8 чисел равна нулю, покажите, что и сумма любых 4 подряд идущих равна нулю; отсюда легко выводится утверждение задачи.

189. Заметьте, что на дробь $1/7$ надо обязательно разделить.

190. Нельзя. Каждая вершина 1000-угольника должна быть вершиной квадрата или пятиугольника, однако таких вершин всего $199 \cdot 5 + 4 = 999 < 1000$.

191. 9.

192. Сначала убедитесь, что x — число очков, начислявшихся за победу, — является целым. Заметив далее, что всего сыграно 15 матчей, а команды набрали 52 очка, рассмотрите уравнение $x \cdot (15 - n) + 2 \cdot n = 52$, где n — число матчей, закончившихся вничью.

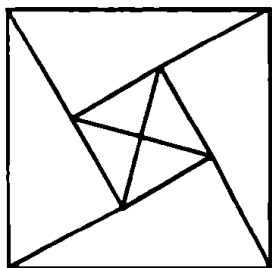


Рис. 12

193. Покажите, что по крайней мере два числа равны 1.

194. Не может. Рассмотрите остатки чисел при делении на 9.

195. Можно; например, как показано на рисунке 12.

196. 362.

197. Существуют. Например, два одинаковых ромба с острыми углами по 45° , переходящих друг в друга при повороте на 90° вокруг общего центра.

198. Нельзя. Максимальная степень тройки, на которую делится произведение всех 10 попарных сумм, равна 5. Это произведение не может, следовательно, состоять из двух одинаковых множителей.

199. 15.

200. Выиграет второй. Клетки доски, не принадлежащие средней вертикали, разобьем на 18 горизонтальных прямоугольников 1×4 . За каждым из этих прямоугольников закрепим один из имеющихся 18 цветов, после чего выигрышная стратегия ясна.

201. Не могут.

202. Предположив противное, покажите, что если разность каких-либо двух вписанных чисел равна a , то найдутся и такие два вписанных числа, разность которых равна $a/3$.

203. Можно.

204. Искомым множеством являются все точки отрезков, соединяющих середины противоположных сторон квадрата.

205. $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$.

206. Сначала лучше всего выяснить, какая буква должна стоять в центральной клетке. Окончательный ответ показан на рисунке 13.

207. Утверждение задачи следует из того, что A кратно 19, если число нулей в его записи $18k + 8$, а кратно 13 при числе нулей, равном $6l + 2$ (k, l – любые целые неотрицательные числа).

208. 850 литров.

209. Выигрывает второй.

210. Можно.

211. Прямая должна проходить через центр прямоугольника и середину отрезка, соединяющего центры кругов.

212. В 1 ч 00 мин.

213. Имеется не более $(1995 - 1)/2$ разных длин звеньев, поэтому по принципу Дирихле найдутся три звена одинаковой длины.

214. Можно. Поставим 16 человек в каре (4 ряда по 4 человека), и пусть каждый дружит с теми, кто с ним в одной шеренге или в одном ряду.

215. Может. Заметим, что любая замкнутая ломаная содержит двухзвенную ломанную из левой и верхней границ некоторой клетки – «уголок». Каждый ход первого игрока является окрашиванием одного из звеньев такого «уголка», а второй игрок вслед за этим может красить другое звено того же «уголка» и в тот же цвет.

216. Эта сумма равна $(0 + 1 + \dots + 9)(0 + 1 + \dots + 9)(0 + 1 + \dots + 9) = 45^3 = 91125$.

217. См. задачу 125.

218. Не может. Допустим, что $\text{НОК}(A, B) = A + B$ для некоторых натуральных A и B . Тогда $A = \text{НОК}(A, B) - B$. Аналогично, B делится на A . Но тогда $A = B$ и $\text{НОК}(A, B) = A \neq A + B$.

219. 11. Через точку T параллельно BC проведем отрезок DE с концами на сторонах AB и AC . Тогда $DT = TE$ и, следовательно, PT – средняя линия треугольника ADE . Отсюда $AE = 2PT = 6$, а поскольку $ETKC$ – параллелограмм, то $AC = AE + EC = AE + TK = 6 + 5 = 11$.

220. Заметьте, что на доске есть 9 квадратов 2×2 , никакие два из которых не имеют общих точек (даже вершин).

<i>В</i>	<i>Р</i>	<i>А</i>	<i>О</i>	<i>Т</i>
<i>Р</i>	<i>Т</i>	<i>О</i>	<i>В</i>	<i>А</i>
<i>О</i>	<i>А</i>	<i>Р</i>	<i>Т</i>	<i>В</i>
<i>Т</i>	<i>О</i>	<i>В</i>	<i>А</i>	<i>Р</i>
<i>А</i>	<i>В</i>	<i>Т</i>	<i>Р</i>	<i>О</i>

Рис. 13

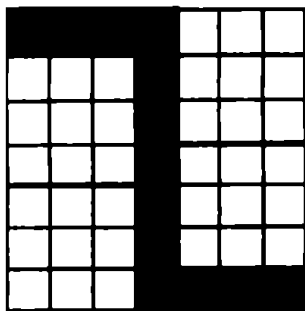


Рис. 14

221. 11. Сумма всех чисел в таблице равна, очевидно, сумме чисел заштрихованной 13-клеточной фигуры (рис.14). Эта сумма не превосходит 11, поскольку сумма пяти чисел, образующих «уголок» (два таких «уголка» помечены на рисунке звездочками) не превосходит 4. С другой стороны, нетрудно построить пример таблицы, где сумма чисел равна 11.

222. Это следует из тождества $a^2 + a^2(a+1)^2 + (a+1)^2 = (a^2 + a + 1)^2$.

223. Нельзя. Предположим, что такую компанию подобрать удалось и пусть A — произвольный ее член. Тогда с каждой из $(5 \cdot 4)/2 = 10$ пар его друзей дружит ровно один из остальных (кроме A) членов компании. С другой стороны, каждый из этих остальных имеет, по условию, с A пару общих друзей. Отсюда следует, что компания насчитывает $1 + 10 = 11$ человек и, по условию, каждый имеет ровно пять друзей. А это противоречит известной «лемме о рукопожатиях».

224. Может. Рассмотрите 7-угольник, вершинами которого являются 7 из 8 вершин правильного 8-угольника.

225. 11. Раскрасив клетки фигуры в шахматном порядке, заметьте, что в каждом из получающихся при разрезании прямоугольников разность числа черных и белых клеток не превосходит 1.

226. 49 км.

227. Прямоугольник следует разрезать на квадрат 1×1 и четыре прямоугольных треугольника с катетами 1 и 2.

228. Покажите, что если самая короткая хорда — не диаметр, то она не может проходить через середину какой-либо другой из данных хорд.

229. Предположив противное, выведите равенства $\frac{c-b}{a-b} = \frac{a-c}{b-c} = \frac{a-b}{a-c}$ и убедитесь, что все эти дроби не могут быть одного знака.

230. Не сможет, если результатом каждого взвешивания будет равенство масс грузов на чашках.

231. Покажите сначала, что прямая MN делит пополам угол между прямыми AD и BC (или равноудалена от них, если $AD \parallel BC$).

232. Заметьте, что квадрат 8×8 содержит обе клетки некоторого корабля.

233. Не могут. Дело в том, что среди 100 последовательных натуральных чисел имеется либо только одно, делящееся на 64, либо только одно, делящееся на 128.

234. 32.

235. Не может. Покажите, что целое число, равное сумме 10000 целых степеней тройки, обязано быть четным.

236. (1; 1).

237. Пусть M – точка пересечения указанных серединных перпендикуляров. Тогда $MA = MA_1$, откуда $\angle AA_1M = \angle A_1AM = \angle A_1AB$. Следовательно, $MA_1 \parallel AB$ и $AM : MC = A_1B : A_1C$, а так как по свойству биссектрисы $AB : AC$, то $AM : MC = AB : AC$. Аналогично можно получить соотношение $AM : MC = AC : BC$. Но тогда $AB : AC = AC : BC$, откуда и вытекает требуемое равенство.

238. Не может.

239. Через 7 минут.

240. Воспользуйтесь тем, что в разложение двузначного числа на множители каждое простое число входит не более чем в 6-й степени.

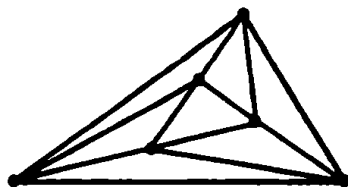


Рис. 15

241. Пример дорожной сети с требуемым свойством показан на рисунке 15.

242. Воспользуйтесь тождеством

$$a^{k+4} + b^{k+4} = (a^k + b^k)(a^4 + b^4) - a^4b^4(a^{k-4} + b^{k-4}).$$

243. Достройте трапецию до квадрата $ABEF$ и убедитесь, что середина отрезка CD совпадает с центром квадрата.

244. 4.

245. 95.

246. Можно.

247. Это случится дважды: в 2 часа дня на третий день и с 8 вечера четвертого дня до 8 утра пятого дня. В первый раз расстояние до Изумрудного Города будет равно 54, а во второй – 32 милям.

248. Если $a_1 < a_2 < \dots < a_{25}$ – данные числа, то $a_k = b_k(c_k)^2$, где $k = 1, 2, \dots, 25$, b_k и c_k – натуральные числа, причем b_k не делится ни на какой точный квадрат, больший 1. Покажите, что $b_1 = b_2 = \dots = b_{25}$. Отсюда последует неравенство $25 \leq c_{25}$, которое вместе с условием $a_{25} \leq 1000$ даст равенство $b_{25} = 1$.

249. 2.

250. 66.

К		С		К		С	
	Ж		З		Ж		З
С		К		С		К	
	З		Ж		З		Ж
К		С		К		С	
	Ж		З		Ж		З
С		К		С		К	
	З		Ж		З		Ж

Рис. 16

нестянутая непокрашенная одна половина. Докрасив все доминошки, получим требуемую раскраску.

255. Искомая сумма равна $(1 + 2 + \dots + 999)/2 + 1000 = 250\,750$.

256. Повернем квадрат на 90° по часовой стрелке вокруг точки А. Пусть отрезок LN переходит при этом в перпендикулярный ему отрезок L_1N_1 . Покажите, что KML_1N_1 — параллелограмм, откуда и будет следовать утверждение задачи.

257. Барон прав, поскольку угол между биссектрисами не может быть прямым.

258. Достаточно найти целые числа x и y , удовлетворяющие системе уравнений $53x + 54y = 1000$, $54x + 53y = 1996$.

259. Ясно, что можно сделать так, чтобы в каждой из кучек стало не менее 2 орехов. Из каждой кучки, содержащей $2k$, $k \geq 2$, орехов можно затем перекладывать по 1 ореху в кучки, где их

ровно 2. Если при этом окажется, что кучек, содержащих $2k$, $k \geq 2$, орехов, нет, то из кучек содержащих 2, 2 и n орехов, где $n = 2k + 1$, $k > 2$, по схеме $(2; 2; n) \rightarrow (3; 1; n) \rightarrow (3; 2; n - 1) \rightarrow (3; 4; n - 3)$ получим кучки, содержащие 3, 4 и $n - 3$ орехов. Остается заметить, что ввиду четности чисел 1996 и 20

кучка из 2 орехов не может оказаться единственной, содержащей четное их число.

260. Вообще говоря, неверно; см. рисунок 17.

261. Не может.

262. В 11 цветов.

263. Существуют; например, числа $a_k = k \cdot 1996! + 1$, где $k = 1, 2, \dots, 1996$.

264. Искомая фигура — окружность, проходящая через точки

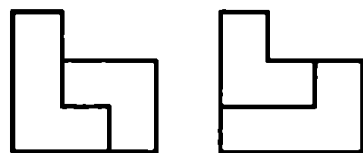


Рис. 17

A и B , из которой удалены такие точки A_1 и B_1 , что прямые AA_1 и BB_1 касаются исходной окружности в точках A и B соответственно.

265. Верно. Дробное число, не являющееся плохим, имеет вид $\frac{1}{m} - \frac{1}{n}$, где m и n – натуральные. Рассмотрите промежуток $\left(\frac{1}{1997}, \frac{1}{1996} - \frac{1}{1997^2}\right)$, на котором (как и на любом промежутке) дробных чисел бесконечно много, и покажите, что $\frac{1}{1997} < \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{1996} - \frac{1}{1997^2}$, если только $m < 1997$, $n < 1997^2$.

266. Заметьте что если бы такой корень существовал, то он был бы общим корнем уравнений $bx + c = 0$ и $ax + d = 0$.

267. Задача сводится к аналогичной для точек на прямой.

268. Может.

269. 12.

270. Покажите, что если тройка чисел $(a; b; c)$ удовлетворяет первому уравнению, то тройка $(a + b; b + c; c + a)$ удовлетворяет второму уравнению

271. Неверно.

272. Допустим, что Бендер подбросил все свои 10 фишек на черное. Если это позволяет ему выиграть – все в порядке. Если же нет, то выигрышная стратегия есть у крупье. Пусть, следуя этой стратегии, крупье должен первым ходом переложить с черного на красное n фишек. Так как по условию $n \leq 10$, то можно считать, что переложены фишки Остапа. В полученной позиции начинающий должен проиграть. Но именно в такое положение Остап может поставить крупье, если до начала игры подбросит на красное n фишек, а на черное – остальные $10 - n$.

273. Искомой может быть только такая окружность, которая касается прямой BA_1 или прямой BA_2 , где A_1 и A_2 – образы точки A при поворотах на 90° вокруг точки C .

274. Можно.

275. Не могут. Допустив существование таких натуральных чисел, обозначим через m наименьшее из них. Тогда, если m кратно 10, то требуемыми свойствами обладает и число $m/10$, а если m не кратно 10, то требуемыми свойствами обладает число $m - 111$ (неравенство $m - 111 > 0$ очевидно). Получается противоречие с выбором числа m .

276. 45° .

277. Пусть $A_1A_2 \dots A_n$ – замкнутая ломаная, каждое звено которой имеет общую точку со звеном A_1A_2 . Тогда вершины A_3 ,

A_5, \dots, A_{2n-1} находятся по одну сторону от прямой A_1A_2 , а вершины A_4, A_6, \dots, A_{2n} — по другую. Но тогда у звеньев $A_{2n}A_1$ и A_2A_3 нет общей точки.

278. 48.

279. Покажите, что указанный радиус по длине равен стороне, противолежащей углу в 30° .

280. Заметьте, что общее число ручек и ножек монстра остается постоянным, а разность между числом ручек и ножек ежедневно возрастает вдвое.

281. Выигрывает тот, кто делает первый ход.

282. Верно.

283. 7.

284. Всегда. Указанное соотношение площадей имеет место тогда и только тогда, когда хотя бы одна из диагоналей четырехугольника параллельна стороне параллелограмма.

285. Верно.

286. Верно. Докажите это методом математической индукции.

287. При всех целых k от 1 до 1995.

288. См. задачу 139.

289. Если на трех попарно смежных гранях написаны числа $a \geq b \geq c$, то $|a - c| = |a - b| + |b - c|$. Остается воспользоваться тем, что все 12 пар смежных граней куба разбиваются на 4 тройки попарно смежных граней.

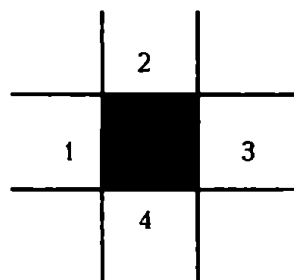


Рис. 18

290. См. задачу 149.

291. Нельзя. Предположим, что нам это удалось. Наложим сетку на большую шахматную доску и раскрасим стороны черных клеток в четыре цвета, как показано на рисунке 18. Легко проверить, что на любой из заготовок всех цветов окажется поровну, а на всей сетке нет. Противоречие.

292. Пусть каждая команда забивает в матче столько голов, сколько матчей перед этим она сыграла. Тогда в турнире будет забито $(1 + 2 + \dots + 13) \cdot 15 = 1365$ голов. Следовательно, хотя бы в одном из матчей будет забито нечетное число голов, откуда и вытекает утверждение задачи.

293. Заметьте, что если число треугольников перестанет увеличиваться, то число сторон каждого из получающихся многоугольников не будет превосходить некоторого фиксированного числа.

294. Пусть R и S — центры окружностей, описанных около

треугольников $АСМ$ и $ВСМ$ соответственно. Точка P симметрична S , а точка Q симметрична R относительно центра окружности, описанной около треугольника ABC ; поэтому $PQ \parallel RS$. Осталось заметить, что $RS \perp CM$, поскольку CM – общая хорда окружностей с центрами R и S .

295. Существуют; например, $M = 3$, $N = 36$.

296. Выигрывает начинающий (при любых m , $n \geq 3$).

297. Убедившись, что треугольник ABC – остроугольный, опишите около него окружность.

298. 12. Если вначале фляжка была у n -го в порядке выезда из A велосипедиста, то в дальнейшем она всегда находилась у n -го в порядке удаленности от B . Следовательно, велосипедист, выехавший k -м ($k = 1, 2, \dots, 7$) был участником не менее чем $|k - n|$ обгонов, в результате каждого из которых он приближался к фляжке. Задача сводится, таким образом, к нахождению наименьшего значения выражения $|1 - n| + |2 - n| + \dots + |7 - n|$.

299. Удобно считать, что имеется ровно 7 цветов, а число заготовок с тем или иным цветом может равняться 0. Покажите, что из заготовок, половинки которых раскрашены в наиболее часто встречающийся и в наиболее редко встречающийся цвета, можно сделать 4 одинаково раскрашенных домино; такое же свойство будет у оставшихся 24 заготовок шести цветов (цвет, наиболее редкий на первоначальных 28 заготовках, больше не учитываем), и т.д.

300. Нельзя.

301. Нельзя.

302. 24.

303. Могут.

304. Нельзя.

305. Нельзя.

306. Один из способов разрезания основан на том, что если O – точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, то на сторонах AB , BC , CD и DA найдутся такие точки K , L , M и N соответственно, что $OK \parallel AD$, $OL \parallel AB$, $OM \parallel BC$, $ON \parallel CD$.

307. 236.

308. Поскольку каждое звено ломаной может пересекать не более 2 из 8 граничных отрезков фигуры, то число звеньев искомой ломаной не может быть меньше, чем $8 : 2 = 4$. Пример

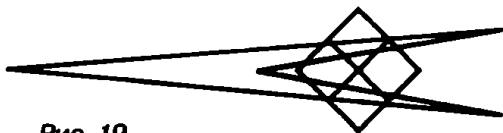


Рис. 19

4-звенной ломаной с требуемыми свойствами показан на рисунке 19.

309. Докажите сначала, что если $v_1 > v_2 > v_3$ — скорости гонщиков, то $v_1 : v_2 = (m_1 + k) : m_1$, $v_2 : v_3 = (m_2 + k) : m_2$, $v_1 : v_3 = (m_3 + k) : m_3$, где m_1, m_2, m_3 — некоторые натуральные числа, каждое из которых взаимно просто с числом k . Из тождества $(v_1 : v_2) \cdot (v_2 : v_3) = (v_1 : v_3)$ выводится равенство $(m_1 + m_2 + k)m_3 = m_1m_2$, которое при четном k невозможно, поскольку из взаимной простоты k с m_1 и m_2 следует, что произведение m_1m_2 нечетно, а сумма $m_1 + m_2 + k$ четна.

310. $2 \leq n \leq 6$. Результатом взвешивания k монет может быть любое из чисел $km - f$, $km - f + 1$, ..., $km + g$, где m — масса настоящей монеты, f и g — число взвешиваний легких и тяжелых монет соответственно. Поскольку $f \leq 20$, $g \leq 20$, то число всех возможных результатов взвешивания не превосходит 41. Нам требуется определить одну упорядоченную пару (кошелек с легкими монетами, кошелек с тяжелыми монетами) среди $n(n-1)$ имеющихся упорядоченных пар кошельков. Это осуществимо, если $n(n-1) \leq 41$, откуда $n \leq 6$. С другой стороны, имея $n \leq 6$ кошельков и взяв из них 1, 2, 6, 18 и 20 монет, мы всегда найдем указанную упорядоченную пару за одно взвешивание.

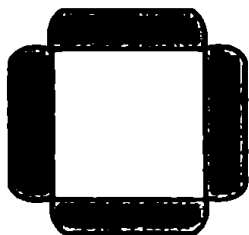


Рис. 20

311. Нет. Если $a < b < c < d$ — данные числа, то оба из частных $c/(d-a)$ и $b/(d-a)$ не могут быть целыми, поскольку их разность заключена между 0 и 1.

312. 5.

313. $8 + 2\pi$. Необходимо показать, что точки полуокружности не выходят за пределы фигуры, штриховкой показанной на рисунке 20.

314. Верно. Пусть O — точка внутри четырехугольника $ABCD$, соединенная с его вершинами. Заметим, что имеет место по крайней мере одно из неравенств $\angle AOB + \angle BOC \geq 180^\circ$ или $\angle AOD + \angle COD \geq 180^\circ$, а также по крайней мере одно из неравенств $\angle BOC + \angle COD \geq 180^\circ$ или $\angle AOB + \angle AOD \geq 180^\circ$. Если, например, $\angle AOB + \angle BOC \geq 180^\circ$, то $\angle AOB \geq 180^\circ - \angle BOC = \angle OBC + \angle OCB$, откуда $\angle AOB = \angle BOC$, $AO = OC$, $AB = BC$. Аналогично, если $\angle BOC + \angle COD \geq 180^\circ$, то $\angle BOC = \angle COD$, $OB = OD$, $BC = CD$. Наконец, из равенства треугольников AOB и AOD следует $AB = AD$.

315. При $N = 15$.

316. При $x = 18, 19, \dots, 656$.

317. Для произвольного набора уголков t_1, t_2, \dots, t_n обозначим через $p(t_1, t_2, \dots, t_n)$ наименьший возможный периметр прямоугольника, содержащего все эти уголки. Пусть на доске расположены уголки t_1, t_2, \dots, t_6 . Тогда $p(t_1) = 8$. Добавляя к t_1 другие имеющиеся уголки, покажите, что $p(t_1, \dots, t_6) < 32$, откуда и будет следовать утверждение задачи.

318. 356 см.

319. Покажите, что указанное значение равно $-(a + b + c)$.

320. Нельзя. Все 22 города разбейте на две группы из 12 и 10 городов так, чтобы при любом обходе города разных групп чередовались между собой.

321. Покажите, что если S_{ij} — площадь пересечения i -го и j -го многоугольников ($1 \leq i < j \leq 3$), то величина $S_{13} + S_{23} - S_{12}$ не превосходит площади 3-го многоугольника.

322. Можно.

323. Рассмотрите треугольник с вершинами в указанных точках касания и покажите, что его высоты принадлежат проведенным прямым.

324. Нельзя. Числа 5 и 6, находящиеся в одной строке левой таблицы, не могут после разрешенных преобразований оказаться в разных строках.

325. Можно.

326. Можно.

327. Выигрывает начинающий. Покажите, что он может после каждого своего хода оставлять свободными столько же клеток с четными номерами, сколько и с нечетными.

328. Это следует из тождества

$$(n-3)(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)(n+3) + 36 = (n^3 - 7n)^2.$$

329. Разрезы можно провести через центр ромба перпендикулярно его сторонам.

330. 11.

331. Из условия следует, что каждый из 8 юношей поссорился не менее, чем с 7 девушками. Поэтому число пар, каждая из которых состоит из не поссорившихся между собой юноши и девушки, не меньше, чем $8 \cdot 7 = 56$. Но оно и не больше 56, так как каждая из 8 девушек поссорилась не более чем с 7 юношами. Следовательно, имеется ровно 56 указанных пар, причем каждый юноша поссорился ровно с 7 девушками, а каждая девушка — ровно с 7 юношами. Отсюда легко получить утверждение задачи.

332. Воспользуйтесь тем, что две непересекающиеся хорды параллельны тогда и только тогда, когда дуги, заключенные между ними, равны.

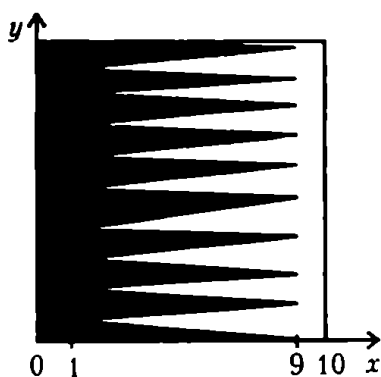


Рис. 21

333. Нельзя. В противном случае самая тяжелая кучка весила бы более $(1 + 2 + \dots + 100) / 10 = 505$ (г), т.е. насчитывала бы не менее 6 гирь, а все десять кучек насчитывали бы не менее $6 + 7 + \dots + 15 = 105$ гирь.

334. 16.

335. Может.

336. Можно. Введем систему координат xOy так, чтобы исследуемый квадрат был ограничен прямыми $x=0$, $x=10$, $y=0$ и $y=10$.

Для первой пробы используем 22-угольник M_1 , показанный на рисунке 21, для второй – 22-угольник M_2 , в который переходит M_1 при повороте на 90° вокруг центра квадрата. Абсциссы и ординаты всех точек закрашенного квадрата определяются результатами первой и второй проб соответственно.

337. 2^{998} .

338. Пусть A и B – точки пересечения графиков с осью ординат, C – точка их пересечения друг с другом. Покажите, что точка C' , симметричная C относительно середины отрезка AB , имеет координаты $(-1; 0)$, т.е. лежит на оси абсцисс.

339. 1033.

340. 97. Убедитесь, что $a_n + 5 = a_n$ при любом натуральном n .

341. Поскольку один из семи подряд идущих дней является воскресеньем, то указанные три месяца содержат не более $7 \cdot 12 + 6 = 90$ дней. Отсюда и следует утверждение задачи.

342. Существуют; например, $a = 2$, $b = 20$, $c = 15$, $d = 30$, $e = 3$, $f = 4$.

343. Площадь O – общая точка отрезков C_1A_1 , C_2B_1 и A_4B_2 .

Покажите, что площадь каждого из треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равна сумме площадей параллелограммов AC_1OB_2 , BA_4OC_2 и CB_1OA_2 .

344. Исходная таблица показана на рисунке 22.

345. 4. Ясно, что хотя бы одна из использованных цифр – четная. Если же такая цифра только одна, то оканчиваются ею 8 из записанных чисел. Покажите, что все двузначные числа, получа-

-13	2	2	-1
2	-13	14	11
2	14	-13	11
-1	11	11	-13

Рис. 22

ющиеся после отбрасывания ее у этих 8 трехзначных чисел, дают попарно различные остатки при делении на 8. Заметив далее, что на нашу четную цифру оканчиваются 4 из полученных двузначных чисел, покажите, что первые цифры этих чисел должны давать попарно различные остатки при делении на 4; это будет противоречить сделанному предположению. Следовательно, на доске имеется не менее двух различных четных цифр. Аналогично устанавливается, что использовано не менее двух различных нечетных цифр; общее же число различных цифр, таким образом, не менее 4. С другой стороны, легко проверить, что числа 111, 112, 113, 114, 211, 212, 213, 214, 311, 312, 313, 314, 411, 412, 413 и 414 дают все возможные остатки при делении на 16.

346. Можно. Пусть m_1, m_2, \dots, m_{10} — массы монет в порядке их следования слева направо. Первым взвешиванием сравниваем $m_1 + m_{10}$ с $m_4 + m_7$. Если $m_1 + m_{10} > m_4 + m_7$, то сравним далее $m_1 + m_4$ с $m_2 + m_3$, если же $m_1 + m_{10} = m_4 + m_7$, то сравним $m_4 + m_7$ с $m_5 + m_6$, а если $m_1 + m_{10} < m_4 + m_7$, то сравнить нужно будет $m_7 + m_{10}$ с $m_8 + m_9$.

347. Пусть ABC — треугольник, в котором $AB = BC > AC$, а точки M и N делят сторону AC на три равные части. Разрезав его по отрезкам BM и BN , получим три нужных треугольника.

348. Кубы можно совместить 24 способами, причем любые две вершины разных кубов совпадут при 3 из этих совмещений. Суммарное (по всем совмещениям) число пар совпавших отмеченных вершин равно $3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$. По принципу Дирихле среди 24 совмещений найдется такое, при котором реализуется не менее 4 таких пар.

349. Можно считать, что $x^2 \geq z^2$, $y^2 \geq z^2$. Тогда третье слагаемое в левой части доказываемого неравенства неположительно, а сумма первого и второго слагаемых, преобразуемая к виду $(x^2 - y^2)^2(z^2 - x^2 - y^2)$, также очевидно неположительна.

350. Через 9 секунд. Выясните сначала, как при указанных превращениях изменяется остаток от деления числа амёб на 5.

ЗАОЧНЫЙ КОНКУРС

1997/98 учебного года

1. Случай $n = 1$ очевиден, а остальные натуральные числа n , не делящиеся на 3, имеют вид $3k \pm 1$, где k — натуральное число.

Рассмотрим $(n + k^2)$ -значное число N , первые n цифр которого — единицы, а остальные k^2 цифр — нули. Тогда запись числа $N - 1$ начинается с $n - 1$ единиц, затем идет нуль, а остальные

k^2 цифр – девятки. Пара последовательных чисел $(N - 1, N)$ и будет искомой. В самом деле, сумма цифр числа N равна n , а сумма цифр числа $N - 1$ равна $n - 1 + 9k^2 = n + (3k + 1)(3k - 1)$, т.е. равна $n + n(n - 2)$ или $n + (n + 2)n$ при $n = 3k + 1$ и $n = 3k - 1$ соответственно.

2. Да, можно. Это следует, например, из тождества

$$n^2 + (n + 3)^2 + (n + 5)^2 + (n + 6)^2 = (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + (n + 4)^2 + (n + 7)^2.$$

3. Из условий задачи следует, что $CQ = AP$ и $CM = AN$, поэтому треугольник ANP может быть получен из треугольника CMQ с помощью параллельного переноса и последующего поворота на 120° . Отсюда следует, что один из углов между отрезками NP и QM равен 60° .

4. Пусть A_1, A_2, \dots, A_{25} – одноклассники, причем A_i участвовал в k_i разговорах ($i = 1, 2, \dots, 25$). Можно считать, что $k_i \leq k_{25} = k$ для любого i , а A_{25} разговаривал с A_1, A_2, \dots, A_k .

Из условия следует, что A_i и A_j при $1 \leq i < j \leq k$ между собой не разговаривали. Поэтому $k_i \leq 25 - k$ при $1 \leq i \leq k$, а общее число разговоров не превосходит

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(k_1 + k_2 + \dots + k_{25}) &\leq \frac{1}{2}(k(25 - k) + k_{k+1} + \dots + k_{25}) \leq \\ &\leq \frac{1}{2}(k(25 - k) + (25 - k)k) = 25k - k^2 = \frac{625}{4} - \left(k - \frac{25}{2}\right)^2 \leq \frac{625}{4}, \end{aligned}$$

т.е. не превосходит 156.

156 = 13 · 12 разговоров могло произойти в случае, когда разговаривали между собой A_i и A_j при всех $1 \leq i \leq 13 < j \leq 25$.

5. Заметим, что каждый попугай травмировал ровно одного из остальных, а все 38 попугаев разбиваются на несколько групп, в каждой из которых у любого попугая есть обидчик. Такая группа не может состоять из трех попугаев, иначе для них не найдется четвертого, который травмировал одного из них.

Отсюда легко вывести, что число групп, состоящих из нечетного числа попугаев, не превосходит 6. А для расселения любой из таких групп достаточно трех клеток; для расселения же группы, состоящей из четного числа попугаев, достаточно двух клеток.

6. Каждое кольцо обойдется сотрудникам во столько же, что и при покупке по два кольца.

7. Если девочка, ушедшая с катка первой (из девочек), встретила там с девочкой, пришедшей последней, то утверждение задачи справедливо.

Допустим теперь, что встреча этих двух девочек не состоялась. Тогда, согласно условию задачи, каждый мальчик присутствовал на катке как до ухода девочки, ушедшей первой, так и после прихода девочки, пришедшей последней. Отсюда и следует доказываемое утверждение (достаточно взять любой из этих двух моментов времени или любой момент между ними).

8. Последовательно убедитесь, что равенства всех чисел можно добиться в таблицах 2×2 , 2×4 , 4×4 , 4×8 и 8×8 .

9. См. указание к задаче 343.

10. Да, сможет. Пусть $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ – настоящие монеты, $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ – фальшивые. Первым взвешиванием можно сравнить сумму масс $A, B, C, D, E, f, g, h, i$ с суммой масс a, b, c, d, F, G, H, I , вторым – сумму масс C, D, E, f, g, h, i с суммой масс c, d, e, F, G, H, I , третьим – сумму масс A, B, c, d, e с суммой масс a, b, C, D, E .

11. Пусть в книге k сказок, причем i -я ($i = 1, \dots, k$) сказка начинается и кончается на страницах с номерами a_i и b_i соответственно. Тогда она занимает $b_i - a_i + 1$ страниц, а все k сказок – $k + (b_1 - a_1) + \dots + (b_k - a_k)$ страниц. Это число согласно условию задачи равно $120 - 1 - 1 - 1 = 117$, откуда

$$k = 117 - (b_1 - a_1) - \dots - (b_k - a_k).$$

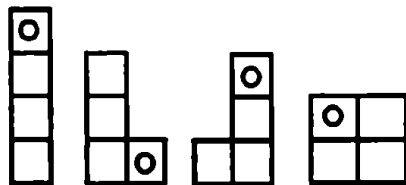
А так как сумма $a_1 + \dots + a_k$ в пять раз меньше суммы $b_1 + \dots + b_k$, то последнее равенство можно переписать в виде $k = 117 - 4(a_1 + \dots + a_k)$.

Отсюда видно, что число k дает остаток 1 при делении на 4, а из того, что натуральные числа a_1, \dots, a_k все различны, легко получить неравенство $k < 9$.

Ясно, что $k \neq 1$, а для $k = 5$ можно построить пример: $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2 = 2$, $a_3 = b_3 = 3$, $a_4 = 4$, $b_4 = 17$, $a_5 = 18$, $b_5 = 117$. Итак, в книге 5 сказок.

12. Воспользуйтесь тем, что величина угла между секущими, проведенными к окружности из одной точки, равна полуразности угловых величин дуг, заключенных внутри этого угла.

13. Требуемым свойством обладает, например, набор фигурок на рисунке 23. Диаметры кружочков одинаковы, а центры совпадают с центрами клеток.



14. Этому уравнению удовлетворяют 25 троек чисел: (1; 4; 16), (2; 3; 14), (2; 4; 8), (2; 5; 6),

Рис. 23

все тройки, получающиеся перестановками чисел в каждой из них, а также тройка (4; 4; 4).

15. См. указание к задаче 340.

16. Последовательно покажите, что общее число собранных камней четно, первоначальное количество камней в каждой коробке нечетно, по крайней мере в трех коробках оно равно 1. Далее перебор.

Было либо 18 камней, разложенных способом $1 + 1 + 1 + 3 + 5 + 7$ или способом $1 + 1 + 1 + 1 + 5 + 9$, либо 24 камня, разложенных способом $1 + 1 + 1 + 5 + 7 + 9$.

17. Если A и B – две из вершин правильного 100-угольника, то всего имеется 99 возможных значений для длины дуги окружности, проходимой от A к B по ходу часовой стрелки. Поэтому, если A_1, \dots, A_{10} – красные, а B_1, \dots, B_{10} – синие точки, то среди 100 пар (A_i, B_j) , $1 \leq i, j \leq 10$, найдутся такие две пары (A_{i_1}, B_{j_1}) и (A_{i_2}, B_{j_2}) , для которых длины дуг от A_{i_1} к B_{j_1} и от A_{i_2} к B_{j_2} равны. А тогда и длины хорд $A_{i_1}A_{i_2}$ и $B_{j_1}B_{j_2}$ равны.

18. Это – игра «Ним» (см., например, «Квант» №1 за 1992 г.).

Число пустых клеток справа по горизонтали от каждой из шашек запишем в двоичной системе счисления. Начинаящий каждым своим ходом должен (и может) общее количество единиц у этих трех чисел в каждом разряде делать четным.

19. Если m и n – искомые числа, d – их наибольший общий делитель, $m = m_1d$, $n = n_1d$, то наименьшее общее кратное равно m_1n_1d . Условие переписывается в виде $m_1n_1d = (m_1 - n_1)^2 d^2$ или $m_1n_1 = (m_1 - n_1)^2 d$.

Так как m_1 и n_1 взаимно просты, то разность $m_1 - n_1$ взаимно проста с каждым из них, а поскольку m_1n_1 делится на $m_1 - n_1$, то $m_1 - n_1 = \pm 1$.

Полагая $m_1 = k$, $n_1 = k + 1$, получим $d = k(k + 1)$, $m = k^2(k + 1)$, $n = k(k + 1)^2$. Эти числа будут десятизначными, например, при $k = 1000$. Проверка показывает, что $m = 1000^2 \cdot 1001 = 1001000000$ и $n = 1001^2 \cdot 1000 = 1002001000$ условию удовлетворяют.

20. Из равенств $AB = BC$ и $BC = CD$ следуют равенства $\angle BAC = \angle BCA$ и $\angle CBD = \angle CDB$. Поэтому

$$\begin{aligned}\angle AOD = \angle BOC &= \frac{1}{2}(\angle OAD + \angle ODA + \angle OBC + \angle OCB) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2(180^\circ - \angle AOD),\end{aligned}$$

откуда $\angle AOD = 90^\circ$. Дальнейшее ясно.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ ЗАДАЧ

Отнесение задачи к той или иной теме и, тем более, определение ее трудности (выраженной количеством звездочек) в значительной мере произвольны. Скажем лишь, что некоторые из задач с номерами, отмеченными тремя звездочками (***), участниками соответствующих конкурсов решены не были, а «однозвездочные» (*) задачи могут предлагаться учащимся на первом году занятий в математическом кружке.

ЛОГИЧЕСКИЕ И ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

- * — 10, 17, 26, 29, 131, 183, 322, 341;
- ** — 28, 36, 44, 52, 55, 89, 105, 138, 153, 208, 212, 226, 230, 239, 274, 295, 307, 346;
- *** — 13, 41, 45, 58, 63, 66, 74, 92, 144, 145, 168, 192, 196, 247, 250, 253, 261, 286, 309, 310, 316, 318, 326, 350.

АРИФМЕТИКА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

- * — 3, 12, 23, 31, 34, 47, 59, 96, 97, 136, 156, 169, 180, 193, 194, 218, 304, 311;
- ** — 1, 2, 4, 25, 39, 49, 61, 82, 84, 87, 101, 106, 112, 118, 121, 122, 129, 134, 142, 151, 159, 166, 175, 176, 181, 184, 198, 199, 207, 216, 235, 238, 245, 255, 268, 275, 300, 305, 315, 334, 342;
- *** — 9, 65, 70, 72, 79, 94, 99, 130, 135, 146, 148, 158, 233, 240, 248, 263, 282, 325, 345.

АЛГЕБРА

- * — 6, 27, 109, 139, 163, 172, 186, 288;
- ** — 15, 53, 76, 90, 133, 202, 222, 229, 236, 242, 258, 266, 289, 312, 328;
- *** — 68, 80, 88, 91, 116, 124, 251, 265, 270, 319, 338, 340, 344, 349.

ГЕОМЕТРИЯ

- * — 157, 162, 179, 243, 271;
- ** — 11, 18, 19, 93, 102, 125, 137, 165, 174, 204, 205, 211, 217, 219, 224, 279, 306, 314, 321, 323, 329;
- *** — 24, 33, 40, 43, 48, 56, 73, 78, 85, 98, 108, 110, 114, 117, 127,

149, 152, 160, 187, 197, 201, 228, 231, 237, 256, 264, 273, 284, 290, 294, 297, 313, 332, 343.

КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

** – 30, 35, 38, 75, 143, 147, 190, 195, 213, 227, 241, 267, 277, 308;
*** – 22, 37, 51, 54, 77, 132, 155, 177, 178, 257, 260, 269, 293, 336, 347, 348.

ЗАДАЧИ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ И ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ. ТАБЛИЦЫ

* – 21, 119, 164, 206, 324;
** – 5, 62, 67, 86, 95, 104, 111, 128, 154, 182, 191, 203, 220, 225, 232, 244, 262, 276;
*** – 32, 50, 115, 120, 150, 161, 221, 234, 246, 254, 278, 283, 291, 302, 303, 317.

КОМБИНАТОРИКА

* – 126, 210;
** – 8, 14, 16, 57, 71, 100, 103, 107, 123, 141, 167, 173, 185, 188, 214, 249, 252, 285, 292, 301, 320, 331, 333;
*** – 42, 46, 60, 81, 140, 170, 223, 259, 287, 298, 299, 330, 337, 339.

ИГРЫ

** – 7, 20, 209, 281, 335;
*** – 64, 83, 113, 171, 200, 215, 296, 327.

ПЕРЕЧЕНЬ АВТОРОВ ЗАДАЧ

Н.Авилов – 54, 86; *С.Азлецкий* – 73, 85, 88, 137; *И.Акулич* – 17, 23, 28, 36, 44, 47, 52, 55, 63, 66, 75, 77, 84, 89, 103, 118, 123, 128, 132, 138, 148, 187, 307, 318, 326; *Н.Антонович* – 96; *С.Афтенюк* – 38; *К.Банков* – 9; *М.Варга* – 34; *Н.Васильев* – 37; *С.Волченков* – 305, 308, 310, 320, 331, 337, 339, 344, 348; *В.Вьюн* – 10; *Г.Гальперин* – 12, 124; *А.Гейн* – 169; *А.Грибалко* – 110, 111, 116, 150, 154, 168, 181, 182, 184, 278; *С.Губа* – 4; *С.Дворянинов* – 65, 68, 91, 131, 312, 313, 316; *Р.Женодаров* – 156, 163, 173, 191, 193, 200, 215, 220, 231, 232, 234, 235, 236, 242, 244, 245, 249, 251, 258, 261, 266, 270, 274, 275, 283, 302, 304, 322, 330, 334, 338; *А.Жуков* – 141, 151; *В.Замков* – 119, 146; *Д.Калинин* – 252, 296, 314; *В.Кибирев* – 39; *С.Конягин* – 345; *И.Копылов* – 324; *С.Костин* – 113; *К.Кохась* – 64, 80, 87; *П.Кошлуков* – 14, 15; *О.Крижановский* – 188, 201, 207, 209, 221, 263, 264, 265, 273, 282, 284, 285, 286, 317, 325, 347, 350; *Г.Кухин* – 183, 208; *Л.Курляндчик* – 3, 49, 59, 69, 70, 94, 129, 135, 144, 199; *В.Кууск* – 219; *А.Кючуков* – 13; *С.Манвелов* – 97; *Ф.Назаров* – 45; *С.Охитни* – 194; *М.Панов* – 342; *В.Перетяцько* – 29; *В.Произво-*

лов – 2, 5, 18, 21, 24, 30, 33, 35, 40, 43, 48, 50, 53, 56, 60, 67, 93, 109, 117(160), 125(217), 127, 130, 133, 139(288), 143, 147, 155, 178, 211, 222, 228, 256, 276, 277, 289, 306, 328, 329, 332, 343, 349; *В.Радунский* – 16; *И.Рубанов* – 271, 272; *А.Савин* – 10, 19, 27, 41, 71, 83, 92, 105, 108, 114, 126, 145, 149(290), 152, 157, 180, 206, 212, 297, 321, 340; *С.Савчев* – 7, 8, 9; *Р.Садыков* – 227; *С.Токарев* – 31, 46, 51, 57, 62, 74, 76, 81, 90, 95, 99, 100, 102, 104, 107, 115, 140, 158, 159, 161, 162, 164, 172, 174, 175, 179, 186, 192, 197, 198, 204, 210, 214, 216, 218, 223, 224, 229, 230, 233, 237, 243, 246, 248, 253, 254, 294, 295, 300, 301, 303, 309, 311, 323, 333, 336, 341, 346; *П.Филевич* – 72, 106, 122, 134, 315; *Х.Хаимов* – 20; *Х.Христов* – 13; *Е.Чернышов* – 11; *А.Чернятьев* – 296; *В.Чичин* – 78; *А.Шанин* – 280, 327; *А.Шаповалов* – 153, 165, 167, 170, 171, 177, 189, 190, 195, 196, 202, 203, 213, 225, 226, 238, 239, 240, 241, 247, 250, 255, 257, 259, 260, 262, 267, 268, 269, 281, 291, 292, 293, 298, 299; *А.Швецов* – 1, 6, 22; *Д.Шихов* – 136.

Заочный конкурс 1997/98 учебного года

И.Акулич – 1, 5, 6, 11, 16; *С.Волченков* – 13; *В.Дольников* – 7; *Л.Курляндчик* – 14; *В.Произволов* – 3, 9, 12, 17; *А.Савин* – 15; *С.Токарев* – 7, 10, 19, 20.

Приложение к журналу «Квант» № 3/98

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

МАТЕМАТИКА 6 — 8

Под редакцией *А.П. Савина*

Составитель *С.И. Токарев*

Редактор *А.Ю. Котова*

Литературный редактор *Л.В. Кардасевич*

Технический редактор *Е.В. Морозова*

Компьютерная группа

Е.А. Митченко, Л.В. Осипова

ИБ № 31

117296 Москва, Ленинский пр., 64А,

«Квант»

Формат 84×108 1/32. Бум. офс. нейтр. Гарнитура кудряшевская.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,72.

Заказ 3477

Отпечатано на ордена Трудового Красного Знамени

Чеховском полиграфическом комбинате

Государственного комитета Российской Федерации по печати

142300, г. Чехов Московской области

Тел. (272) 71-336. Факс (272) 62-536